

Chapitre 1 : Introduction

Nous allons aborder les notions de base qui permettent d'analyser, de comprendre et de représenter un processus. Il s'agira d'un processus qui correspond à un système automatisé.

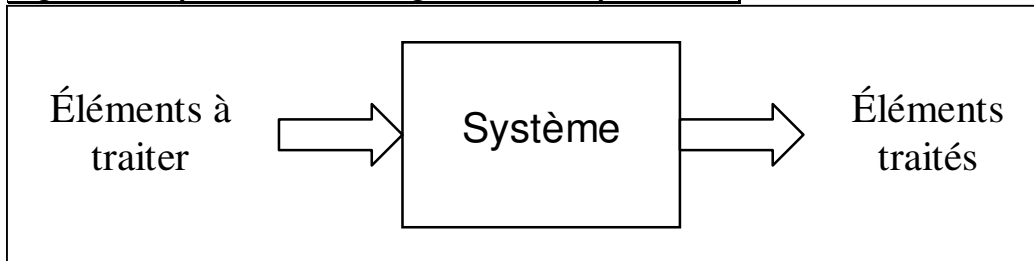
1.1 Qu'est-ce qu'un processus ?

Définition :

Un processus est un ensemble ordonné de tâches pour arriver à un certain résultat. Toutes des tâches qui caractérisent le processus seront effectuées par le système.

Représentation d'un processus :

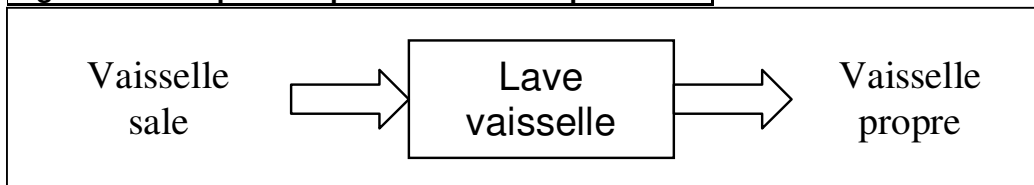
Figure 1 : Représentation très générale d'un processus



Le système va agir sur les éléments à traiter pour arriver à un résultat : les éléments traités.

Exemple : Machine à laver la vaisselle

Figure 2 : Exemple de représentation d'un processus



L'élément à traiter est la vaisselle sale.

Le système est le lave-vaisselle dont la fonction est de laver la vaisselle.

L'élément traité est la vaisselle propre.

La figure 1 peut être légèrement détaillée de manière à faire apparaître la source d'énergie nécessaire au traitement. On peut alors ajouter une flèche au dessus en notant « énergie ». L'origine et la gestion de cette énergie va permettre de distinguer trois catégories de systèmes :

Élémentaire, mécanisé et automatisé.

1.2 Les différents types de systèmes

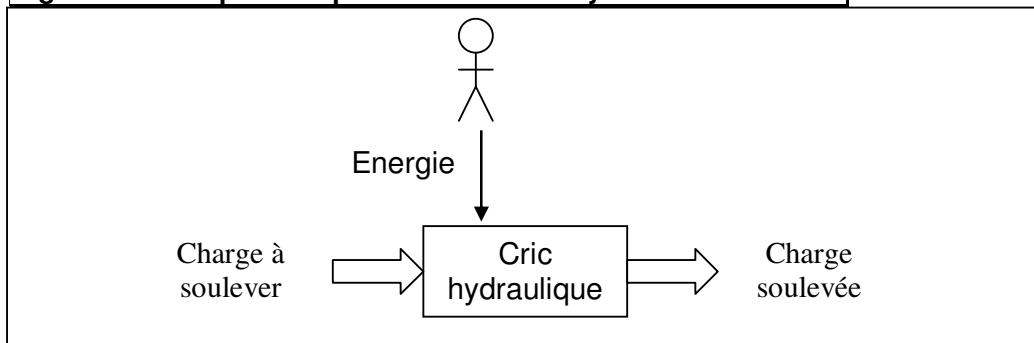
Le rôle de l'homme vis-à-vis du système sera différent selon le type de système. On distingue trois types de systèmes qui diffèrent selon l'énergie apportée par l'homme.

1°) Le système élémentaire

Ici c'est l'homme qui apporte toute l'énergie au système.

Exemple : Un cric hydraulique qui sert à soulever une charge.

Figure 3 : Exemple de représentation d'un système élémentaire

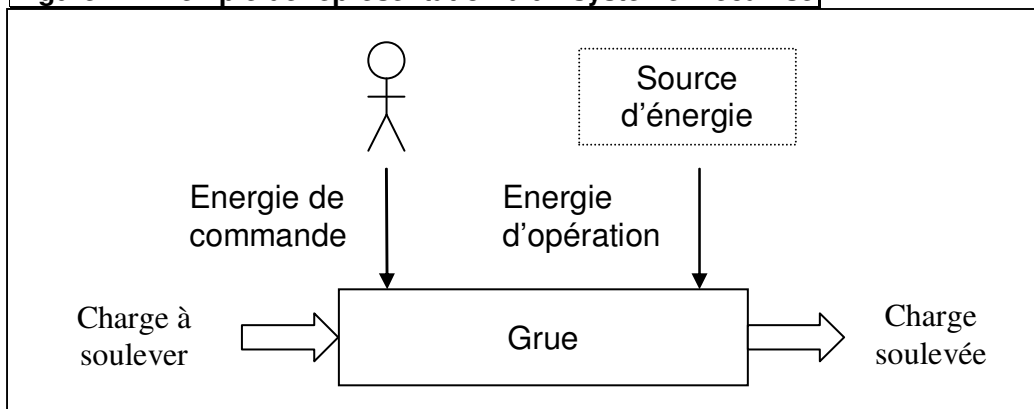


2°) Le système mécanisé

Ici l'homme n'apporte que l'énergie de commande au système. Toute la puissance nécessaire à l'opération provient d'un actionneur.

Exemple : Une grue qui sert à soulever une charge.

Figure 4 : Exemple de représentation d'un système mécanisé



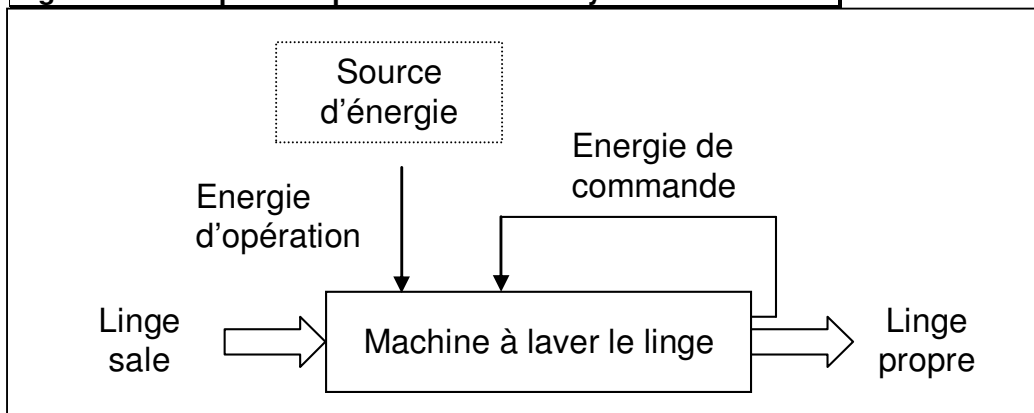
3°) Le système automatisé

Ici l'homme n'apporte même plus l'énergie de commande, la commande est réalisée de façon interne. L'homme est alors extérieur au système, son rôle n'est plus que de superviser.

Exemple : Une machine à laver le linge

Dans le cas d'une machine à laver le linge, l'homme paramètre le mode de lavage puis enclenche le processus mais ensuite il n'intervient plus dans la commande. Le système est dit automatisé car l'ensemble des tâches qui caractérisent le processus sont effectuées par le système à l'aide de commandes internes.

Figure 5 : Exemple de représentation d'un système automatisé



Il s'agit ici d'un système bouclé car la commande est réalisée de façon interne en fonction de l'état du système (la figure 5 montre bien une boucle au niveau de la commande).

On peut imaginer différentes tâches nécessaires au processus :

- Ouvrir la vanne d'entrée d'eau
- Refermer la vanne d'entrée d'eau
- Chauffer l'eau
- Ajouter le savon
- ...

Chacune de ces tâches doit être démarrée par le système à partir d'une commande (comme montré sur la figure 5) mais ne peut pas démarrer n'importe quand. En effet, dans l'exemple des deux premières tâches qui consistent à ouvrir et fermer la vanne d'entrée d'eau, il faut s'assurer que la machine à laver contienne la bonne quantité d'eau. Dans ce cas, après avoir ouvert la vanne, il faut que le système surveille en permanence le niveau de l'eau pour savoir quand refermer la vanne.

On comprend dès lors l'utilité d'un système bouclé, le système provoque une commande interne en fonction de l'état du système (le niveau de l'eau dans l'exemple précédent).

1.3 Les systèmes bouclés

Domaines concernés

Les systèmes bouclés sont utilisés dans de nombreux domaines relatifs à l'électronique :

Automatique, régulation, techniques d'amplification, filtrage de signaux,...

Quelque soit le domaine, le principe est le même : il s'agit d'agir sur le système en fonction de l'état du système pour se rapprocher d'un l'objectif fixé.

Quelques notions liées au contrôle de processus *

- **Automatique** « <http://fr.wikipedia.org/wiki/Automatique> »

L'automatique fait partie des sciences de l'ingénieur. Cette discipline traite de la modélisation, de l'analyse, de la commande et de la régulation des systèmes dynamiques. Elle a pour fondements théoriques les mathématiques, la théorie du signal et l'informatique théorique. L'automatique permet l'automatisation de tâches par des machines fonctionnant sans intervention humaine. On parle alors de système asservi ou régulé.

L'état désiré du système est nommé la consigne. Les hommes de l'art en automatique ou automatisme se nomment automaticiens.

Les hommes de l'art en automatique ou automatisme se nomment automaticiens.

- **Automatisme** « [http://fr.wikipedia.org/wiki/Automatisme_\(organe\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Automatisme_(organe)) »

Un **automatisme** est un sous-ensemble de machines, destiné à remplacer l'être humain dans des tâches, en général simples et répétitives, mais réclamant précision et rigueur.

- **Automatisation** « <http://tecfa.unige.ch/~sciolli/staf11/automatisation.html> »

Activité mentale qui transforme un processus contrôlé en un processus automatique. Par processus automatique nous entendons un processus qui « n'exige pas d'attention pour être exécuté, il ne s'accompagne d'aucun effort cognitif et n'est pas limité par une capacité centrale de traitement ».

- **Régulation** « <http://gatt.club.fr/page1/page23/page23.html#paragraphe1.1> »

La régulation regroupe l'ensemble des techniques utilisées visant à contrôler une grandeur physique.

Exemples de grandeur physique : Pression, température, débit, niveau ...

- **Automation**

Regroupe l'ensemble des techniques (automatisme et régulation) permettant de faire fonctionner une installation sans intervention humaine.

* Les définitions ne sont pas à apprendre par cœur mais permettent de comprendre les concepts.

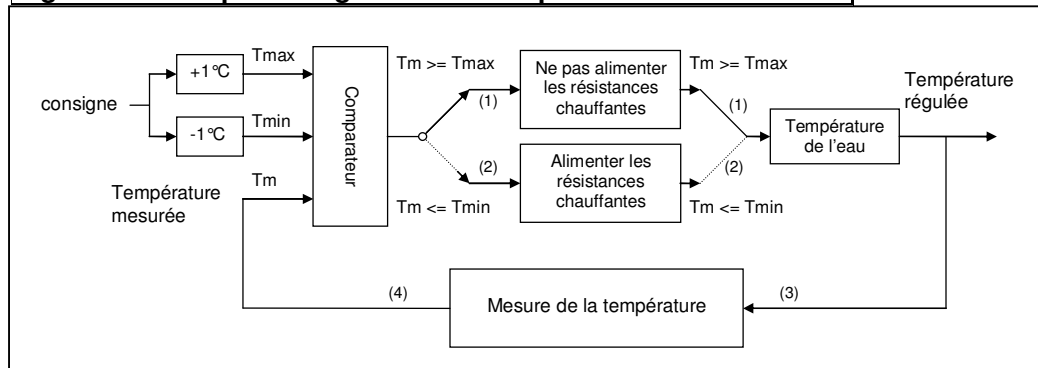
Exemple de système asservi utilisé pour la régulation

Dans l'exemple de la machine à laver nous avons montré pourquoi le système automatisé nécessite une boucle fermée (= asservissement). Il fallait que le système donne la commande de fermeture de la vanne que lorsque le niveau d'eau est correct.

Dans le même exemple on peut imaginer une commande interne pour chauffer l'eau et une autre pour arrêter de chauffer l'eau. Si on suppose que l'utilisateur a entré 40°C comme température, il faudra que le système s'arrange pour que la température de l'eau atteigne 40°C, il faut donc pouvoir réguler la température !

Consigne : température de 40 °C
 Type de régulation : tout ou rien
 Erreur tolérée : 1 °C

Figure 6 : Exemple de régulation de température en tout ou rien



La figure ci-dessus illustre un exemple de régulation de température, elle ne fait pas apparaître des grandeurs électriques, elle ne fait que mettre en évidence le principe. En réalité ce sont des signaux électriques qui sont présents à l'entrée du comparateur.

Le type de régulation est **tout ou rien**, c'est-à-dire que l'on fait quelque chose (*tout*) ou l'on ne fait rien du tout (*rien*). Dans l'exemple, le *tout* correspond à alimenter les résistances chauffantes pour augmenter la température de l'eau (point (2) fig. 6) alors que le *rien* correspond à laisser l'eau refroidir (point (1) fig. 6).

Lorsque l'on analyse la figure 6, on voit deux références de température qui vont servir à la régulation :

$$T_{max} = \text{Consigne} + 1\text{ }^{\circ}\text{C} \quad \rightarrow \quad T_{max} = 41\text{ }^{\circ}\text{C} \quad (\text{si la consigne vaut } 40\text{ }^{\circ}\text{C})$$

$$T_{min} = \text{Consigne} - 1\text{ }^{\circ}\text{C} \quad \rightarrow \quad T_{min} = 39\text{ }^{\circ}\text{C} \quad (\text{si la consigne vaut } 40\text{ }^{\circ}\text{C})$$

La température actuelle de l'eau, connue grâce à une mesure, est alors comparée à Tmax et à Tmin pour savoir quelle action doit être faite.

Si $T_m \geq T_{max}$ c'est que la température est trop élevée, on va alors choisir de la laisser refroidir en n'alimentant pas les résistances chauffantes.

* Le 1 °C utilisé pour le calcul de Tmax et Tmin correspond à l'erreur tolérée.

Si $T_m \leq T_{min}$ c'est que la température est trop basse, on va alors choisir de l'augmenter en alimentant les résistances chauffantes.

La figure 6 fait clairement apparaître un asservissement (points (3) et (4)) qui consiste à surveiller en permanence la température pour savoir quelle action faire.

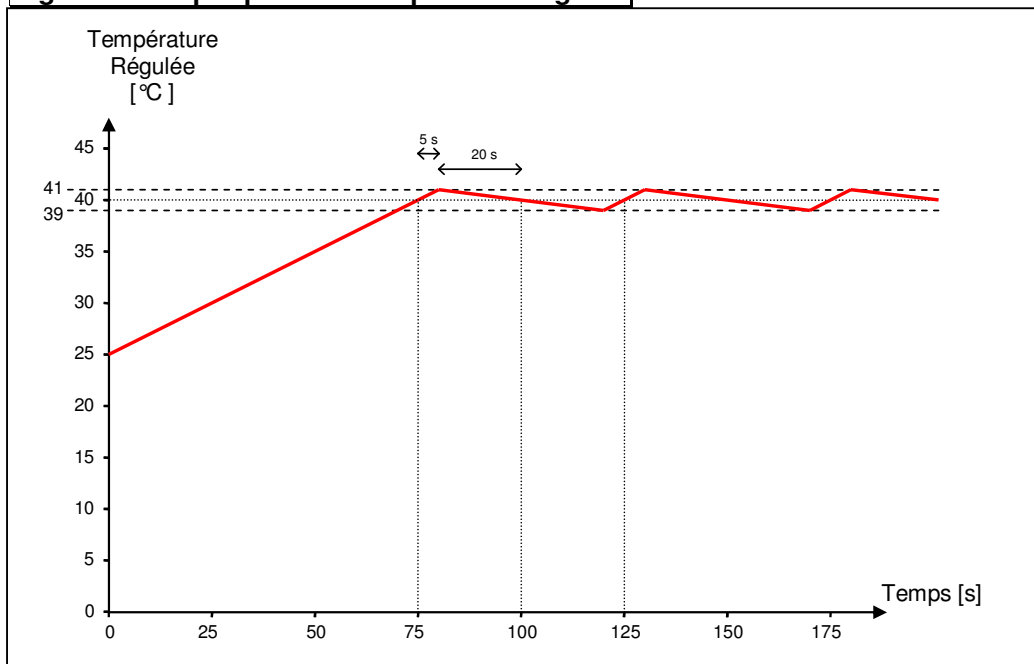
Variation de la température régulée en fonction du temps :

Suppositions :

- Lorsque les résistances chauffantes sont alimentées, la température régulée augmente de 1 °C toutes les 5 secondes
- Lorsque les résistances chauffantes ne sont pas alimentées, la température régulée diminue de 1 °C toutes les 20 secondes.
- La température de l'eau est à 25 °C au départ.

Graphique :

Figure 7 : Graphique de la température régulée



Il a fallu 75 secondes pour que la température de l'eau atteigne les 40°C, après quoi la régulation tout ou rien permet de garder la température à 40°C à 1°C près.

Chapitre 2 : La régulation

Qu'est-ce que la régulation ?

La régulation est un ensemble de moyens mis en œuvre au sein d'un système physique pour agir sur une grandeur physique du système (la grandeur à régler) de sorte à atteindre l'objectif voulu (la consigne).

Exemple :

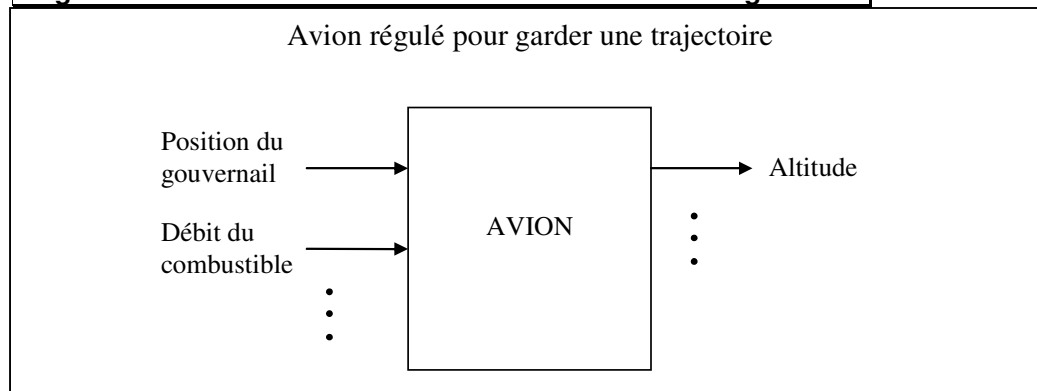
Un thermostat utilise une régulation de température. On agit sur un système physique (la pièce ou l'appartement) de sorte à ce qu'une grandeur physique (la température) atteigne l'objectif voulu (la température fixée par l'utilisateur).

2.1 Variables d'entrée et de sortie

En régulation, la notion de variable d'entrée ou de sortie est différente qu'en électronique. En effet, en électronique, tout ce qui entre dans le système est une variable d'entrée alors que tout ce qui sort du système est une variable de sortie. En régulation c'est différent !!!

En régulation on appelle variable d'entrée tout ce qui agit sur l'état du système et variable de sortie tout ce qui caractérise le système.

Figure 8 : Notion de variable d'entrée et de sortie en régulation



Dans l'exemple ci-dessus, l'avion est le système physique. La position du gouvernail et le débit du combustible sont des variables d'entrée en terme de régulation car elles agissent sur la trajectoire de l'avion. L'altitude est une variable de sortie en terme de régulation car elle caractérise l'état du système.

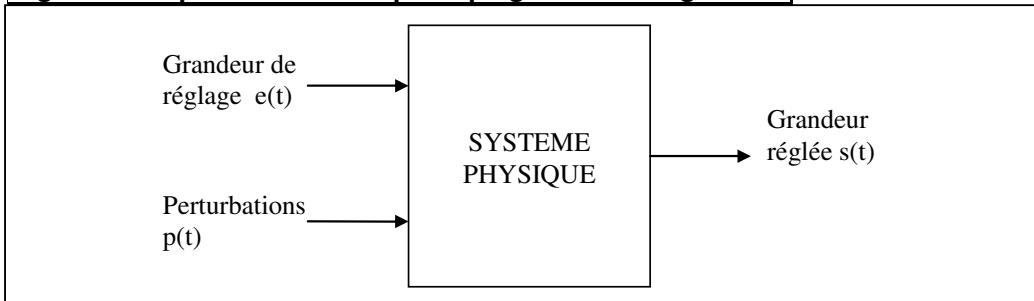
2.2 Principe général

Dans un système complexe soumis à une régulation, on peut imaginer de nombreuses variables d'entrée et de sortie. Cependant par souci de facilité nous n'allons considérer par la suite qu'une seule entrée et une seule sortie. Tous les autres éléments qui agissent sur l'état du système feront partie de ce qu'on appellera les perturbations.

Principe général :

Nous considérerons que tout système soumis à une régulation ne contient qu'une seule entrée et une seule sortie. Tous les autres éléments agissant sur le système feront partie de ce qu'on appellera les perturbations.

Figure 9 : Représentation du principe général de régulation



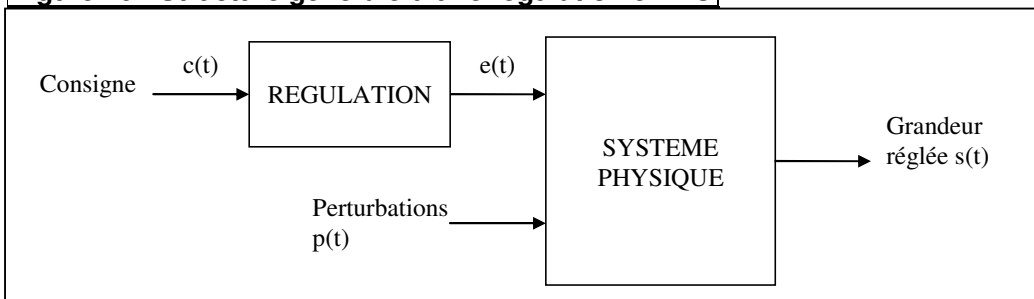
Pourquoi une seule entrée et une seule sortie ?

Nous pourrions facilement imaginer un système soumis à une régulation pour lequel nous avons deux entrées qui agissent sur l'état du système (donc deux entrées de réglage). Imaginons par exemple une pièce soumise à une régulation de température dans laquelle il existe un réglage agissant sur une résistance chauffante (pour augmenter la température) et un réglage agissant sur un ventilateur (pour diminuer la température). Dans ce cas il serait possible d'imaginer un comportement aberrant tel que chauffer à fond et refroidir à fond (absurde bien évidemment). Ce qui signifie donc que lorsque l'on considère deux grandeurs de réglage, il faut pouvoir régler une de ces grandeurs en tenant compte du réglage de l'autre ; ce qui complique considérablement la régulation. C'est donc pour cette raison que par la suite nous ne considérerons qu'une seule entrée et une seule sortie, toutes les autres entrées sont considérées comme des perturbations.

2.3 Régulation en BO et en BF

Dans une régulation en BO (boucle ouverte), la grandeur de réglage dépend uniquement de la valeur de la consigne.
Par ailleurs la valeur de la grandeur réglée n'est pas prise en compte pour déterminer la grandeur de réglage à apporter.

Figure 10 : Structure générale d'une régulation en BO



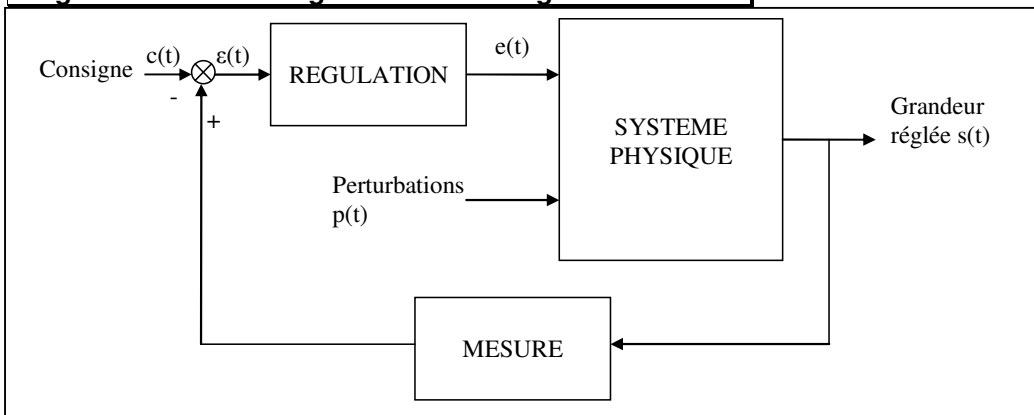
Les notations utilisées pour les figures 10 et 11 sont :

- $c(t)$ La consigne
- $e(t)$ La grandeur de réglage
- $p(t)$ Les perturbations
- $s(t)$ La grandeur réglée ou la grandeur à régler
- $\varepsilon(t)$ l'erreur entre la grandeur réglée et la consigne ($\varepsilon(t) = s(t) - c(t)$)

Dans une régulation en BF (boucle fermée), la grandeur de réglage dépend de la valeur de l'erreur qu'il y a entre la grandeur réglée et la consigne.

La valeur de la grandeur réglée est donc prise en compte pour déterminer la grandeur de réglage à apporter.

Figure 11 : Structure générale d'une régulation en BF



Avantages et inconvénients de la régulation en BO et en BF :

	Avantages	Inconvénients
Régulation BO	<ul style="list-style-type: none"> • Plus simple à mettre en oeuvre • Peut être parfait si l'on a une connaissance parfaite du système • Ne peut pas rendre instable un système qui est stable en absence de régulation 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne tient pas compte des perturbations • Ne peut pas rendre stable un système qui est instable en absence de régulation
Régulation BF	<ul style="list-style-type: none"> • Tient compte des perturbations • Peut rendre stable un système qui est instable en absence de régulation 	<ul style="list-style-type: none"> • Plus difficile à mettre en oeuvre • Ne peut être parfait même si connaissance parfaite du système • Peut rendre instable un système qui est stable en absence de régulation

2.4 Problème didactique

Régulation de niveau d'une cuve cylindrique à axe vertical.

La grandeur à régler est donc le niveau de la cuve $L(t)$.

La grandeur de réglage est le débit d'entrée $F_{IN}(t)$.

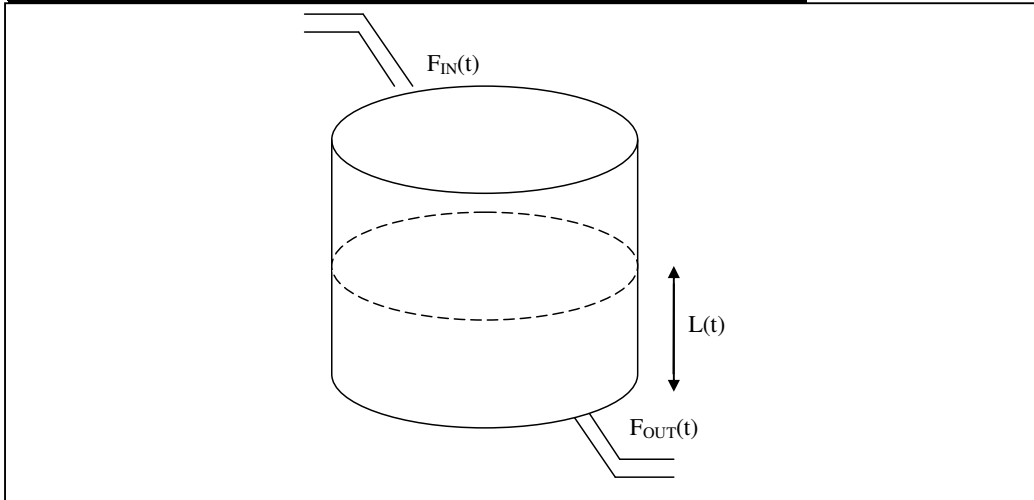
Les perturbations sont représentées par un débit de sortie $F_{OUT}(t)$, c'est comme si l'ensemble des perturbations étaient symbolisées par un trou dans la cuve.

Nous sommes bien en accord avec le principe général de régulation où nous n'avons qu'une entrée et une sortie ; toutes les autres entrées sont représentées par des perturbations.

En nous référant Fig.9 nous avons :

- Le système physique : la cuve cylindrique à axe vertical
- Les perturbations $p(t) = F_{OUT}(t)$
- La grandeur de réglage $e(t) = F_{IN}(t)$
- La grandeur réglée $s(t) = L(t)$

Figure 12 : Représentation concrète du problème didactique



Remarque : Nous voyons apparaître dans cet exemple la distinction fondamentale entre les notions de variables d'entrée, de sortie en terme de régulation et les notions de variables d'entrée, de sortie en électronique. $F_{OUT}(t)$ qui sort du système est une grandeur d'entrée en terme de régulation.

Equation différentielle du système :

Nous devons étudier la problème du point de vue de la régulation et exprimer la sortie $L(t)$ en fonction des deux entrées $F_{IN}(t)$ et $F_{OUT}(t)$. Nous devons donc commencer par rechercher l'équation différentielle du système qui décrit l'évolution de $L(t)$ en fonction de $F_{IN}(t)$ et de $F_{OUT}(t)$.

Nous pouvons constater que ce qui est susceptible de faire varier la niveau $L(t)$ c'est le volume $V(t)$. En effet :

$$(1) \quad \boxed{L(t) = \frac{V(t)}{S}} \quad \text{Et donc} \quad (2) \quad \boxed{\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times \frac{dV(t)}{dt}} \quad \text{car } S \text{ est constant.}$$

Nous pouvons également constater que ce qui est susceptible de faire varier le volume sont les débits $F_{IN}(t)$ et $F_{OUT}(t)$. En effet, si $F_{OUT}(t) = 0$, la valeur de $F_{IN}(t)$ représente alors la vitesse à laquelle le volume $V(t)$ augmente.

Nous comprenons alors que la variation du volume par rapport au temps provient directement de la différence entre le débit d'entrée et le débit de sortie :

$$(3) \quad \boxed{\frac{dV(t)}{dt} = F_{IN}(t) - F_{OUT}(t)}$$

Nous pouvons vérifier que cette équation est vérifiée au niveau des unités :

$dV(t) \longleftrightarrow [m^3]$	$F_{IN}(t) \longleftrightarrow \left[\frac{m^3}{s} \right]$
$dt \longleftrightarrow [s]$	$F_{OUT}(t) \longleftrightarrow \left[\frac{m^3}{s} \right]$

En insérant l'équation (3) dans (2), on trouve l'équation différentielle du système :

$$(4) \quad \boxed{\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))}$$

Pour simplifier, nous dirons que : l'action de régulation = la grandeur de réglage*.

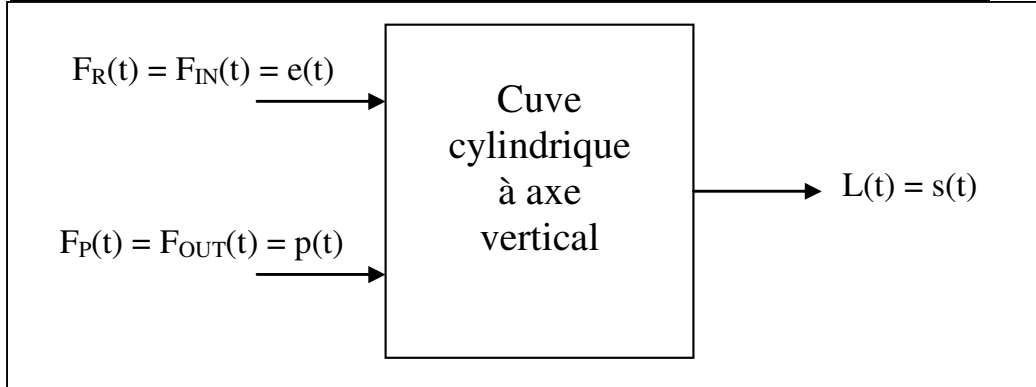
La régulation apportée est : $F_R(t) = F_{IN}(t)$
 La perturbation est : $F_P(t) = F_{OUT}(t)$

En transposant les éléments Fig. 9 à notre problème didactique, on trouve :

La grandeur de réglage $e(t) = F_{IN}(t) = F_R(t)$
 Les perturbations $p(t) = F_{OUT}(t) = F_P(t)$
 La grandeur réglée $s(t) = L(t)$

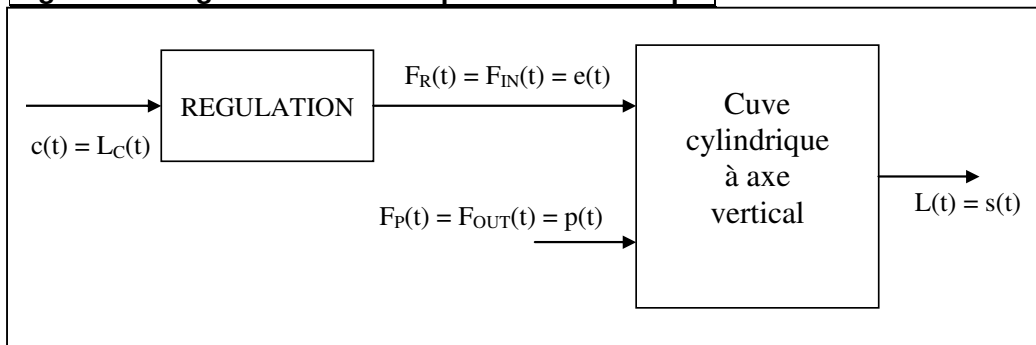
* Il s'agit d'une question de terminologie, nous choisirons d'appeler action de régulation ce qui provient du bloc régulation et agit sur le système de manière à influencer la grandeur réglée. Dans la littérature il est possible de rencontrer une nuance où l'action de régulation n'est pas forcément la grandeur de réglage mais ne fait que contribuer à celle-ci. Dans ce cas on pourrait avoir dans le cas d'une régulation « tout ou peu » l'action de régulation qui est la contribution de l'élément soumis à la régulation et une contribution supplémentaire constante propre à la régulation « tout ou peu ». Nous avons alors la grandeur de réglage qui est le résultat de l'élément soumis à la régulation additionnée à la contribution constante propre à la régulation « tout ou peu ».

Figure 13 : Représentation du problème didactique en terme de régulation



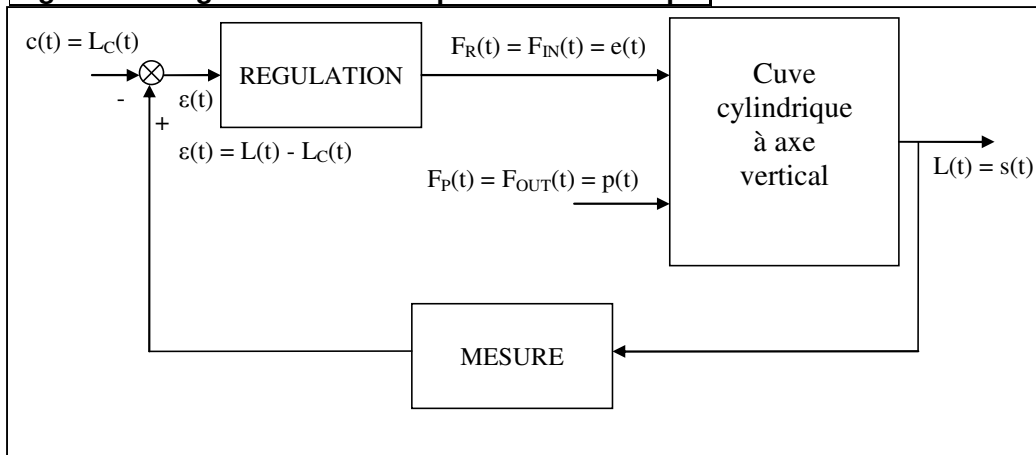
Nous pouvons alors choisir une régulation en boucle ouverte (son plus gros inconvénient est qu'elle ne tient pas compte des perturbations) ou une régulation en boucle fermée pour réguler le niveau de la cuve.

Figure 14 : Régulation en BO du problème didactique



L'action de régulation dépend uniquement de la consigne. Les perturbations ne sont pas prises en compte.

Figure 15 : Régulation en BF du problème didactique



L'action de régulation dépendra de la différence entre le niveau et la consigne. Les perturbations sont prises en compte indirectement car on analyse le niveau en permanence.

La régulation apportée est $F_R(t) = F_{IN}(t)$.
 La perturbation est $F_P(t) = F_{OUT}(t)$.

Dans la suite du chapitre, nous allons étudier différents types de régulation et voir si ceux-ci sont satisfaisants pour différentes formes de perturbations.

Nous allons chercher, par exemple, à démontrer qu'une régulation à action proportionnelle et intégrale (AP & AI) est satisfaisante dans le cas d'une perturbation constante. Nous allons donc chaque fois nous mettre dans des conditions particulières (telle régulation et telle perturbation) puis résoudre l'équation différentielle du système pour voir si dans ces conditions $L(t)$ revient au niveau de consigne.

2.5 Régulation par « tout ou rien » et par « tout ou peu »

1 Principe

On admet une marge d'erreur sur la consigne. Dans ce cas, pour notre problème didactique, nous admettons que le niveau de consigne L_c soit tel que :

$$L_{c_{min}} \leq L(t) \leq L_{c_{max}} \quad , \text{ et ce à tout instant } t.$$

La régulation par « tout ou rien » et par « tout ou peu » est utilisée en boucle fermée (voir Fig. 11) en utilisant la stratégie ci-dessous :

Si $L(t) \geq L_{c_{max}}$	→	F _{IN} (t) = F _{IN} min	Pour faire diminuer le niveau
Si $L(t) \leq L_{c_{min}}$	→	F _{IN} (t) = F _{IN} max	Pour faire augmenter le niveau

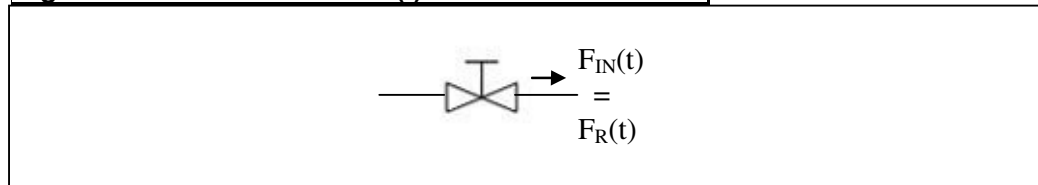
a.) Régulation par « tout ou rien »

Le symbole à droite est le symbole d'une vanne. C'est celle-ci qui est soumise à la régulation.



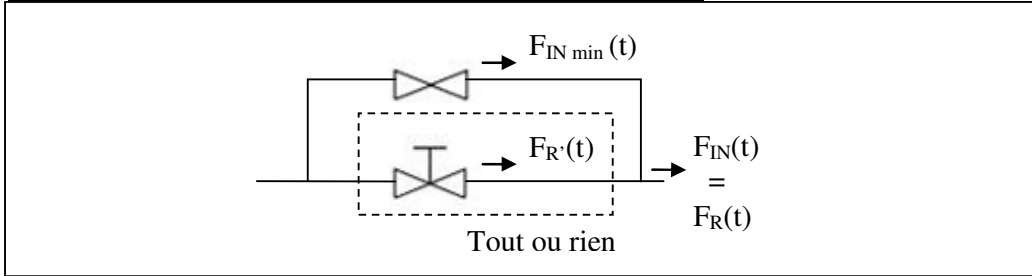
Si $L(t) \geq L_{c_{max}}$	→	la vanne est totalement fermée	→	F _{IN} (t)=0
Si $L(t) \leq L_{c_{min}}$	→	la vanne est totalement ouverte	→	F _{IN} (t)= F _{IN} max

Figure 16 : Débit d'entrée Fin(t) en mode tout ou rien



b.) Régulation par « tout ou peu »

Si $L(t) \geq L_{c_{max}}$	→	la vanne est totalement fermée	→	F _{IN} (t) = F _{IN} min
Si $L(t) \leq L_{c_{min}}$	→	la vanne est totalement ouverte	→	F _{IN} (t) = F _{IN} min + F _R (t) = F _{IN} max

Figure 17 : Débit d'entrée $F_{IN}(t)$ en mode tout ou peu


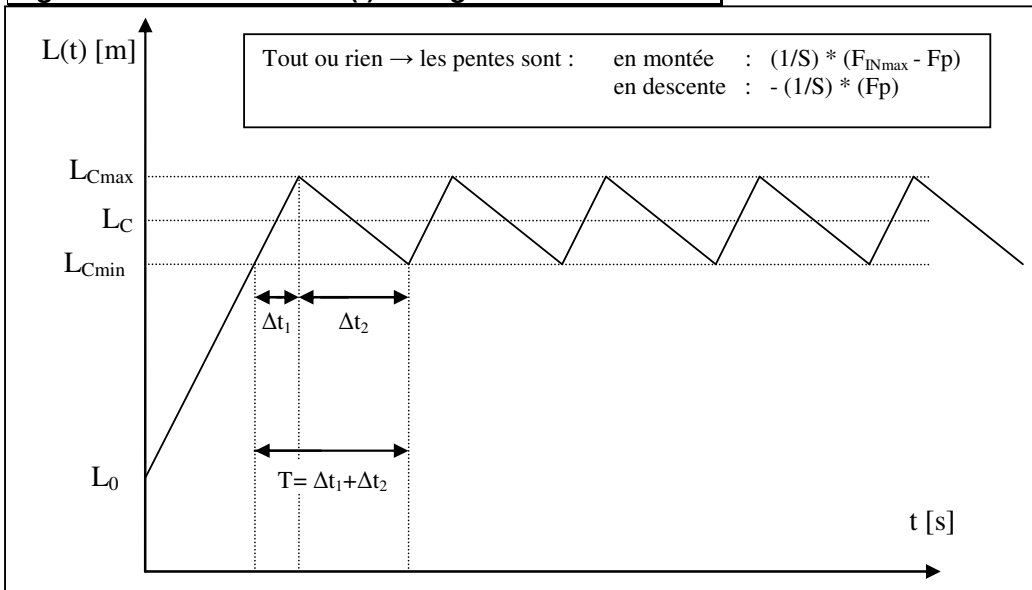
Pour simplifier nous dirons que : l'action de régulation = la grandeur de réglage
 Comme expliqué p.11 nous choisirons d'appeler action de régulation l'action en provenance du bloc de régulation*.

Dans ce cas la grandeur de réglage $F_{IN}(t)$ est l'action de régulation $F_R(t)$.
 La vanne soumise à la régulation va permettre d'agir sur $F_R(t)$.

Nous trouvons alors : $F_{IN}(t) = F_{IN \min} + F_R(t) = F_R(t)$

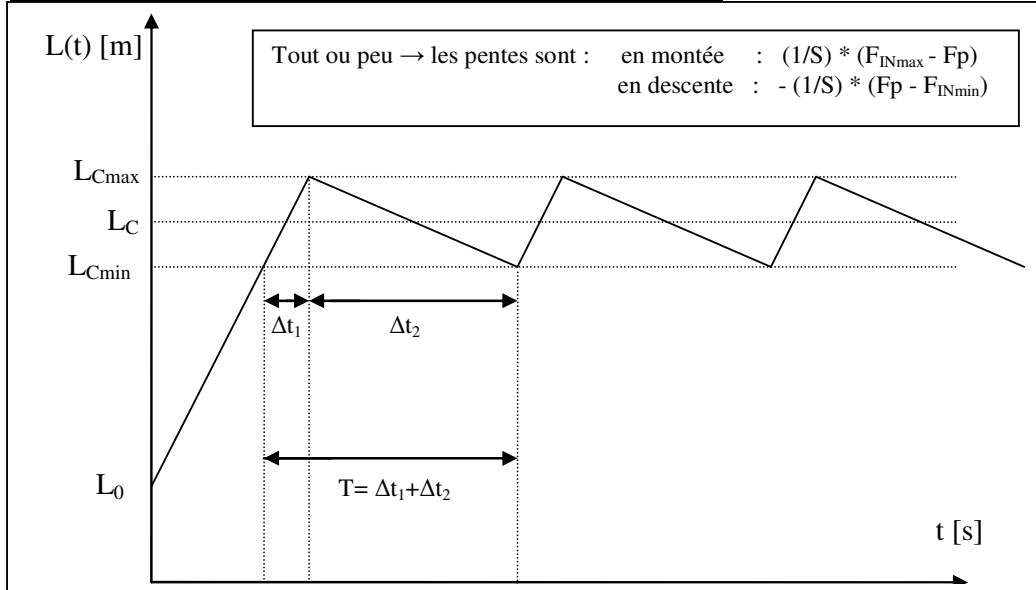
2 Evolution de $L(t)$ sur perturbation constante

Représentons maintenant l'évolution de $L(t)$ dans le cas d'une régulation « tout ou rien » et « tout ou peu ». En nous basant sur l'équation différentielle du système nous savons que le niveau évoluera proportionnellement à la différence entre le débit d'entrée et le débit de sortie.

Figure 18 : Evolution de $L(t)$ en régulation tout ou rien


* Dans la littérature l'action de régulation est souvent l'action liée à l'élément soumis à la régulation. Dans ce cas, en « tout ou peu », l'action de régulation correspond à ce que nous nommons $F_R(t)$ et la grandeur de réglage est différente de l'action de régulation.

Figure 19 : Evolution de L(t) en régulation tout ou peu



Nous constatons que les pentes sont les mêmes lorsque le niveau augmente alors qu'elles sont différentes lorsque le niveau diminue. Il en résulte une fréquence différente en « tout ou rien » et en « tout ou peu ».

3 Conclusions sur ces types de régulation

Avantages et inconvénients de ces types de régulation :

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> ● Simple à mettre en oeuvre ● Régulation en boucle fermée donc tient compte des perturbations ● Garantit qu'à tout moment L(t) est compris entre L_{Cmax} et L_{Cmin} 	<ul style="list-style-type: none"> ● Phénomène oscillatoire inévitable ● Ne tient pas compte de l'ampleur de l'écart entre la grandeur à régler et la consigne ● Implique certaines conditions au niveau des perturbations (voir ci-dessous)

Conditions à respecter au niveau des perturbations :

Que l'on soit en « tout ou rien » ou en « tout ou peu », lorsqu'il faut faire monter le niveau on fait $F_{IN}(t) = F_{IN\ max}$ (on fait le « tout ») mais il faut qu'en toute circonstance (peu importe la perturbation) le niveau puisse monter.

Il faut donc que pour tout t, $F_p(t) < F_{IN\ max}$

Si maintenant il faut faire descendre le niveau, il faut que peu importe la perturbation, le niveau puisse descendre. Il faut donc que pour tout t :

- en « tout ou rien » : $F_p(t) > 0$
- en « tout ou peu » : $F_p(t) > F_{IN \text{ min}}$

Comparaison entre la régulation « tout ou rien » et « tout ou peu » :

Mis à part que la régulation « tout ou peu » est plus contraignante au niveau de la gamme de perturbation admissible, sa performance est meilleure que celle de la régulation « tout ou rien ». Cela s'explique par le fait qu'à conditions égales, la fréquence d'oscillation de $L(t)$ est plus faible en « tout ou peu » qu'en « tout ou rien ». Le fait de devoir faire face à une fréquence moins élevée nécessite des composants moins performants. Une autre façon de voir est qu'à des performances égales de composants, le « tout ou peu » permet d'arriver à un meilleur résultat. Le tout ou peu est donc meilleur mais implique des conditions plus restreintes sur les valeurs tolérées de perturbation.

Remarque : On peut essayer de diminuer la marge d'erreur tolérée (rapprocher $L_{C_{max}}$ et $L_{C_{min}}$ de L_C) mais au prix d'une fréquence plus élevée. Il faut donc dans ce cas des composants plus performants.

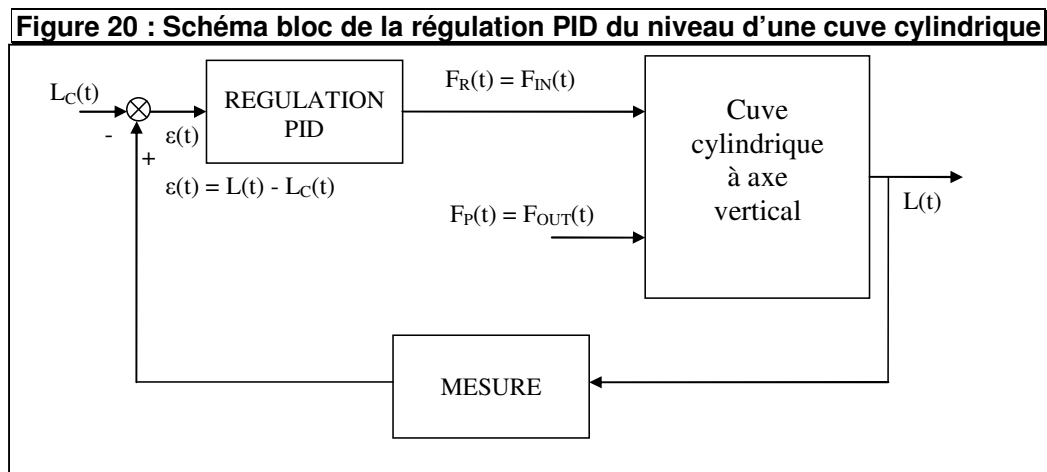
2.6 Régulation par PID

Il s'agit toujours d'une régulation en boucle fermée. On va donc apporter une régulation suivant la différence entre la grandeur réglée et la consigne.

Dans notre exemple, comme on agit sur le débit d'entrée $F_{IN}(t)$, on aura :

$$F_{IN}(t) = F_R(t) \quad (F_R(t) \text{ car c'est la régulation apportée})$$

La perturbation correspond quant à elle au débit de sortie : $F_{OUT}(t) = F_p(t)$



Le schéma bloc de la page précédente est directement lié à notre problème didactique (que l'on peut rattacher à la représentation concrète illustrée Fig.12) qui est en accord avec le schéma général d'une régulation en boucle fermée (Fig.11).

Dans les pages qui suivent nous allons tenter d'analyser l'évolution de $L(t)$ pour des conditions particulières de perturbation et de régulation.

Nous allons commencer par appliquer une régulation par action proportionnelle* (AP) pour différents types de perturbations. Nous verrons alors, suivant l'allure de $L(t)$, si ce type de régulation convient pour faire face à ces types de perturbations.

Nous allons ensuite appliquer une action intégrale (AI) et analyser l'efficacité de cette action vis-à-vis de différents types de perturbations. Juste après nous verrons l'utilité de combiner l'AP et l'AI.

Nous verrons encore ce que peut apporter l'action dérivée (AD) puis nous terminerons par montrer la régulation PID qui permet le plus de réglages possibles, c'est-à-dire la combinaison de l'AP, l'AI et de l'AD.

1 Etude de l'action proportionnelle (AP)

Comme il s'agit d'une régulation en boucle fermée, nous allons apporter une action de régulation directement liée à $(L(t)-L_C)$. L'action de régulation va alors constituer directement ce qu'on appelle « grandeur de réglage » de manière à influencer le niveau de la cuve $L(t)$.

Lorsque nous choisissons comme « technique de régulation » l'action proportionnelle, l'action de régulation sera directement proportionnelle à $(L(t)-L_C)$.

Nous aurons alors dans ce cas : $F_R(t) = - p (L(t)-L_C)$

- Où p est le coefficient (positif) de l'action proportionnelle
informe sur l'ampleur de l'action proportionnelle
- $(L(t)-L_C)$ est l'erreur (la différence entre le niveau et la consigne)
- Le signe - met en évidence qu'il s'agit d'une action correctrice

Comme il s'agit du problème de la cuve, l'équation différentielle du système doit être vérifiée, nous avons alors :

$$\boxed{\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))} \quad \text{où}$$

$$\boxed{F_{IN}(t) = F_R(t) \longleftrightarrow \left[\frac{m^3}{s} \right]}$$

$$\boxed{F_{OUT} = F_P(t) \longleftrightarrow \left[\frac{m^3}{s} \right]}$$

* C'est une « technique » de régulation, elle est étudiée un peu plus loin.

Pour pouvoir résoudre l'équation différentielle du système (et trouver l'expression de $L(t)$), nous devons connaître les expressions de $F_{IN}(t)$ et de $F_{OUT}(t)$ de manière à les introduire au sein de l'équation différentielle du système.

Nous devons donc considérer la situation particulière que nous avons décidé d'étudier (telle action de régulation et telle forme de perturbation) de manière à pouvoir faire correspondre $F_{IN}(t)$ et $F_{OUT}(t)$ à leurs expressions mathématiques.

Dans le cas particulier d'une action de régulation par action proportionnelle, nous aurons :

$$F_{IN}(t) = F_R(t) = -p(L(t) - L_C)$$

Nous devons également prendre en compte le type de perturbation auquel nous avons affaire ainsi que certaines conditions initiales.

1°) Perturbation momentanée et instantanée ayant provoqué une baisse de niveau.

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(5) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -p(L(t) - L_C)$ Action proportionnelle

$F_{OUT}(t) = F_P(t) = 0$ Perturbation momentanée

(6) $L(t=0) = L_0 \neq L_C$ Perturbation instantanée

Pour simplifier, nous considérerons pour la suite que la consigne est une constante.

On obtient l'équation de $L(t)$:

$$L(t) = L_C - (L_C - L_0) \cdot e^{-\frac{p}{S} \cdot t}$$

La résolution est donnée à l'annexe 1.

Interprétation du résultat :

- 1^{ère} vérification : Nous vérifions que les conditions initiales sont vérifiées

$L(t=0) = L_0$?

A partir de l'expression
→ OK c'est vérifié

$$L(t=0) = L_C - (L_C - L_0) \cdot e^{-\frac{p}{S} \cdot 0} = L_0$$

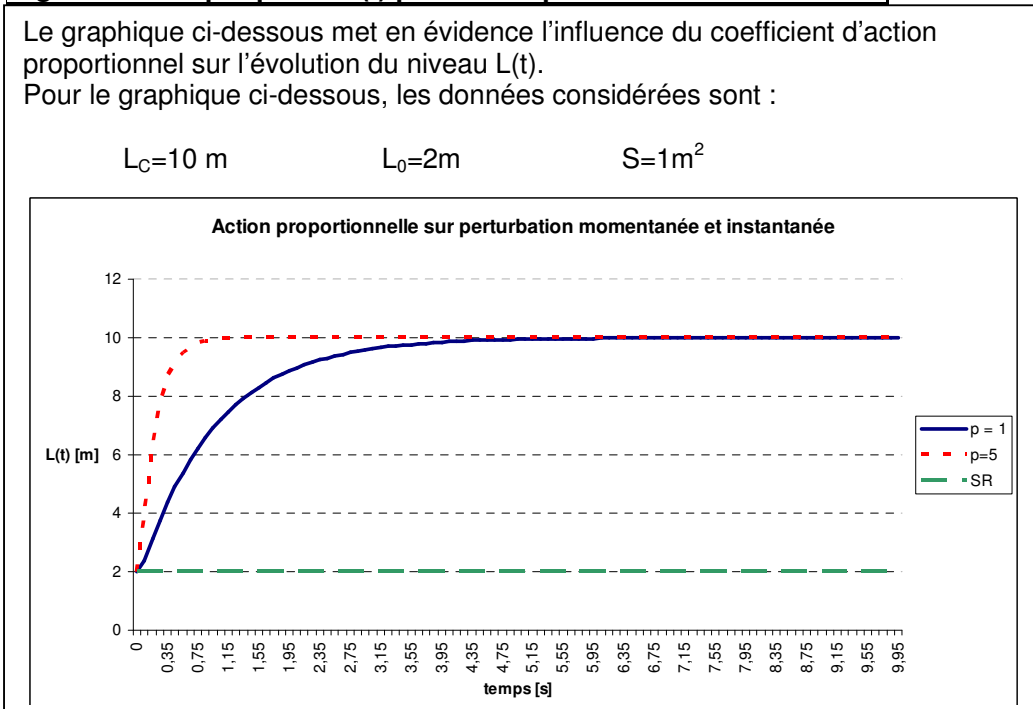
- 2^{ème} vérification : Nous calculons vers quoi tend $L(t)$ lorsque t tend vers l'infini de manière à vérifier si on tend à revenir à la consigne.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = ?$$

$$L_C - (L_C - L_0) \cdot e^{-\frac{p}{S} \cdot \infty} = L_C$$

OK, on tend à revenir au niveau de consigne.

Figure 21 : Graphique de $L(t)$ pour AP et perturbation momentanée



Nous pouvons remarquer que le graphique de $L(t)$ est en accord avec les deux vérifications faites précédemment. Autrement dit :

- $L(t=0) = L_0 \neq L_C$
- Le niveau tend à revenir au niveau de consigne.

Dans la mesure où l'attente de la régulation est de revenir au niveau de consigne*, on peut dire que l'action proportionnelle est satisfaisante dans le cas d'une perturbation momentanée et instantanée. Le graphique fait également apparaître l'évolution de $L(t)$ en absence de régulation (SR = sans régulation) qui montre bien sûr que le niveau reste à L_0 car dans ce cas $F_{IN}(t)=F_{OUT}(t)=0$.

On peut également remarquer que la valeur du coefficient d'action proportionnel influence la rapidité avec laquelle $L(t)$ tend à revenir au niveau de consigne. Plus le coefficient d'action proportionnel est élevé, plus le niveau aura tendance à tendre rapidement vers le niveau de consigne.

De la même manière que pour la charge d'un condensateur sur un échelon de tension, nous pouvons faire apparaître la notion de constante de temps.

* On peut cependant imaginer que l'on puisse tolérer une erreur constante par rapport à la consigne. Dans certaines conditions particulières on pourrait même tolérer une erreur linéairement croissante.

Dans notre cas, la constante de temps $\tau = S/p$, ce qui signifie que l'on aura d'autant plus tendance à tendre rapidement vers le niveau de consigne que p est élevé et/ou que S est petit. La première idée est alors d'augmenter la valeur de p tant que possible mais au-delà d'une certaine valeur on peut montrer qu'il y a instabilité.

N'hésitez pas à vous référer à l'annexe 2 qui tente de justifier de manière visuelle que l'allure de $L(t)$ est en accord avec l'équation différentielle.

2°) Perturbation constante

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(7) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -p(L(t) - L_C)$ Action proportionnelle

$F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P$ Perturbation constante

(8) $L(t=0) = L_0 = L_C$ Supposition initiale

On obtient l'équation de $L(t)$:
 La résolution est donnée à l'annexe 3.

$$\Rightarrow L(t) = L_C - \frac{F_P}{p} \cdot (1 - e^{-\frac{p}{S}t})$$

Interprétation du résultat :

- 1^{ère} vérification : Nous vérifions que les conditions initiales sont vérifiées

$L(t=0) = L_C$?

A partir de l'expression
 → OK c'est vérifié

$$L(t=0) = L_C - \frac{F_P}{p} \cdot (1 - e^{-\frac{p}{S} \cdot 0}) = L_C$$

- 2^{ème} vérification : Nous calculons vers quoi tend $L(t)$ lorsque t tend vers l'infini de manière à vérifier si on tend à revenir à la consigne.

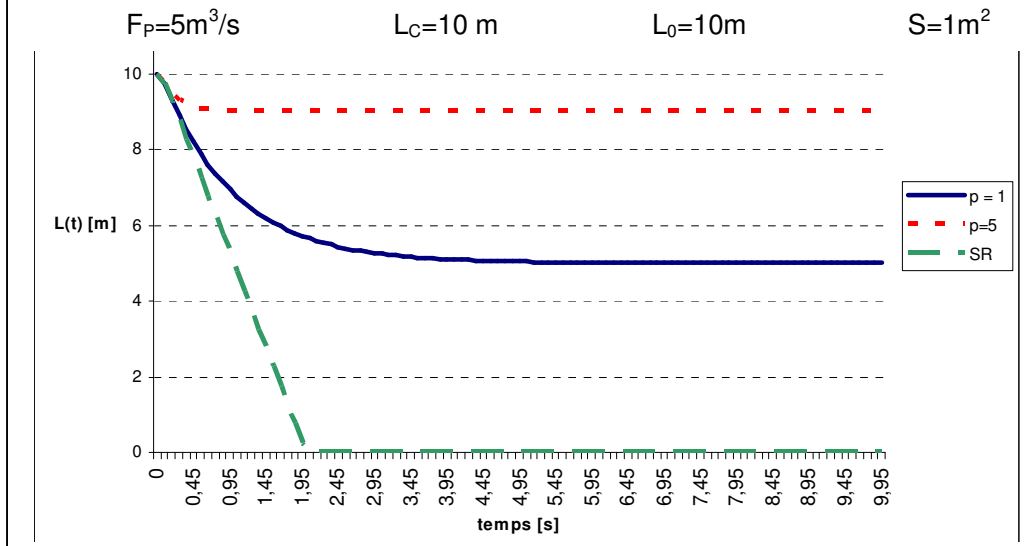
$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = ?$

$$L_C - \frac{F_P}{p} \cdot (1 - e^{-\frac{p}{S} \cdot \infty}) = L_C - \frac{F_P}{p}$$

ATTENTION on ne revient pas à la consigne, on tend vers un écart permanent.

Figure 22 : Graphique de $L(t)$ pour AP et perturbation constante

Le graphique ci-dessous met en évidence l'influence du coefficient d'action proportionnel sur l'évolution du niveau $L(t)$.
 Pour le graphique ci-dessous, les données considérées sont :



On peut voir qu'en absence de régulation le niveau chute à vitesse constante (cas du trou dans la cuve). On peut montrer que la pente de $L(t)$ vaut dans ce cas $-F_P/S$

Nous pouvons également remarquer que le graphique de $L(t)$ est en accord avec les deux vérifications faites à la page précédente. Autrement dit :

- $L(t=0) = L_C$
- On tend vers un écart permanent qui vaut $-F_P/p$

Vis-à-vis du résultat, nous pouvons dire que nous sommes moyennement satisfait. Nous avons bien sûr une nette amélioration par rapport à la situation sans régulation (SR) mais hélas nous ne revenons pas au niveau de consigne. Cependant l'AP permet de faire en sorte que le niveau ne s'éloigne pas plus de la consigne que la valeur de l'écart permanent, à savoir : F_P/p (en valeur absolue).

On peut alors se dire qu'en augmentant suffisamment la valeur de p , on devrait parvenir à limiter suffisamment l'écart maximum entre le niveau et la consigne mais à partir d'une certaine valeur de p il y a risque d'instabilité.

Dans ce cas, nous allons augmenter le coefficient d'action proportionnel tant que possible tout en nous assurant de ne pas atteindre les limites d'instabilité.

Dans la mesure où l'écart maximum entre le niveau et la consigne est inférieur à l'écart maximum toléré, on peut dire que l'on est satisfait de la régulation.

On peut constater que l'écart permanent vers lequel on tend sera d'autant plus faible que le coefficient d'action proportionnel est élevé (mais il faut s'assurer de ne pas atteindre les limites d'instabilité) et que la perturbation est faible.

Comment se fait-il que l'on ne revienne pas au niveau de consigne ?

Imaginons un instant que l'on revienne au niveau de consigne.

Dans ce cas la différence entre le niveau et la consigne vaut zéro (l'erreur est nulle) ce qui entraîne une action proportionnelle $F_R(t)=0$.

On se retrouve alors dans une situation où $F_{IN}(t)=0$ et $F_{OUT}(t)=F_p$.
 On comprend alors que le niveau $L(t)$ va diminuer.
 Pour revenir au niveau de consigne et y rester il faudrait à la fois une différence nulle entre le niveau et la consigne (ce qui entraîne $F_R(t)=0$) et un équilibre entre les débits d'entrée et de sortie (donc $F_R(t)=F_p$).
 Ces deux conditions sont impossibles à respecter si $F_p \neq 0$.

3°) Conclusions sur l'action proportionnelle (AP)

Nous avons constaté que l'AP apporte une amélioration par rapport au cas SR. Nous pouvons dire que l'AP améliore les résultats d'un ordre, autrement dit nous obtiendrons les mêmes résultats avec une AP et une perturbation constante que S.R. et une perturbation un cran moins élevée (perturbation momentanée).

Nous ne l'avons pas démontré mais si nous apportons une AP dans le cas d'une perturbation linéairement croissante, on tend vers un écart qui augmente linéairement (une asymptote oblique).

Tableau récapitulatif :

Type de perturbation	S.R. (sans régulation)	AP (action proportionnelle)
Perturbation momentanée et instantanée	Le niveau conserve un écart permanent	Le niveau tend à revenir au niveau de consigne
Perturbation constante	Il y a un écart linéairement croissant entre le niveau et la consigne	On tend vers un écart permanent
Perturbation linéairement croissante	On a l'écart entre le niveau et la consigne qui augmente proportionnellement à t^2	On tend vers un écart linéairement croissant entre le niveau et la consigne

En conclusion nous pouvons dire que l'AP est satisfaisante dans le cas d'une perturbation momentanée et moyennement satisfaisante dans le cas d'une perturbation constante, tout dépend de l'erreur maximale tolérée. Nous remarquons également que le fait d'augmenter le coefficient p de l'AP améliore les résultats mais il existe une valeur maximale de p à ne pas dépasser pour éviter une instabilité.

Nous verrons plus tard que le type d'action de régulation à apporter dépend évidemment de la perturbation mais également du type d'erreur toléré, de l'ordre de l'équation différentielle du système et de la façon dont la consigne est susceptible de varier (même si par facilité nous considérons que la consigne est constante).

Nous allons maintenant chercher à apporter une régulation qui permette de revenir à la consigne lorsque la perturbation est constante, pour cela nous allons devoir prendre en compte la durée pendant laquelle le niveau est différent de la consigne.

Nous allons apporter une action proportionnelle à de la différence entre le niveau et la consigne (en intégrant en fonction du temps). Il s'agit de l'action intégrale (AI).

2 Etude de l'action intégrale (AI)

Dans le cas d'une action de régulation de type AI (action intégrale), nous avons :

$$AI(t) = F_{IN}(t) = F_R(t) = -i \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt$$

Où i est le coefficient de l'action intégrale.

Il s'agit donc d'une action de régulation de type correctrice (le signe – indique une action de correction), qui prend en compte la différence entre le niveau et la consigne et qui tend compte du temps pendant lequel le niveau est différent de la consigne.

1°) Perturbation constante

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(9) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -i \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt$ AI

(10) $F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P$ Perturbation constante

(11) $L(t=0) = L_0 = L_C$ Supposition initiale

On obtient l'équation :

La résolution est donnée à l'annexe 4.

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{\sqrt{i \cdot S}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S}} \cdot t\right) \quad \text{Où} \quad \omega = \sqrt{\frac{i}{S}}$$

• 1^{ère} vérification : Nous vérifions que les conditions initiales sont vérifiées

Il faut donc vérifier si le niveau est au niveau de consigne à l'instant $t=0$.
Il faudra aussi vérifier si la vitesse de variation du niveau = $-F_P/S$ à l'instant $t=0$.

$L(t=0) = L_C$?
 → OK c'est vérifié

$$L(t = 0) = L_C - \frac{F_P}{\sqrt{i \cdot S}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S}} \cdot 0\right)$$

$$\left(\frac{d(L(t) - L_C)}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{F_P}{S} \quad ?$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(L(t) - L_C)}{dt}\right)_{t=0} &= \left(\frac{d(L(t))}{dt}\right)_{t=0} = \left(-\frac{F_P}{\sqrt{i \cdot S}} \cdot \sqrt{\frac{i}{S}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{i}{S}} \cdot t\right)\right)_{t=0} \\ &= -\frac{F_P}{\sqrt{i \cdot S}} \cdot \sqrt{\frac{i}{S}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{i}{S}} \cdot 0\right) = -\frac{F_P}{\sqrt{i \cdot S}} \cdot \sqrt{\frac{i \cdot S}{S \cdot S}} = -\frac{F_P}{S} \end{aligned}$$

→ OK c'est vérifié

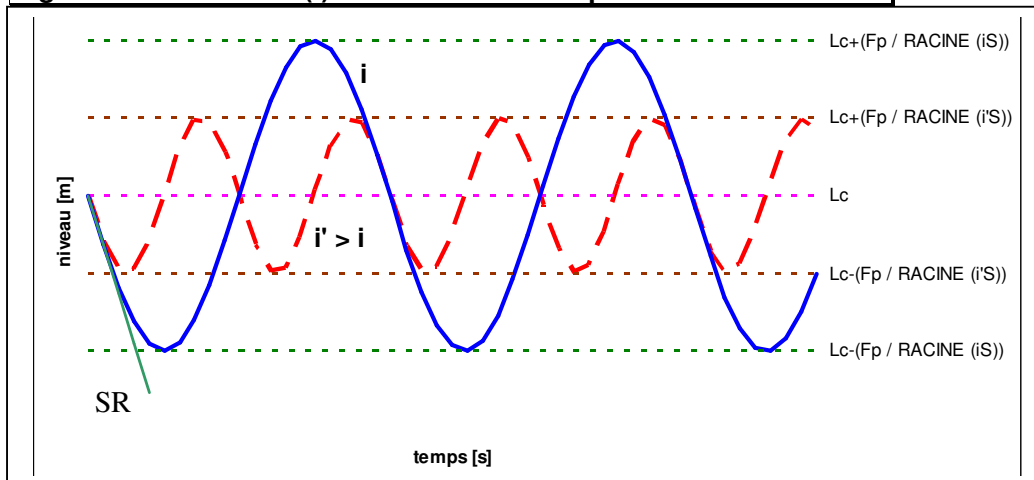
- 2^{ème} vérification : Nous calculons vers quoi tend $L(t)$ lorsque t tend vers l'infini de manière à vérifier si on tend à revenir à la consigne.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = ?$$

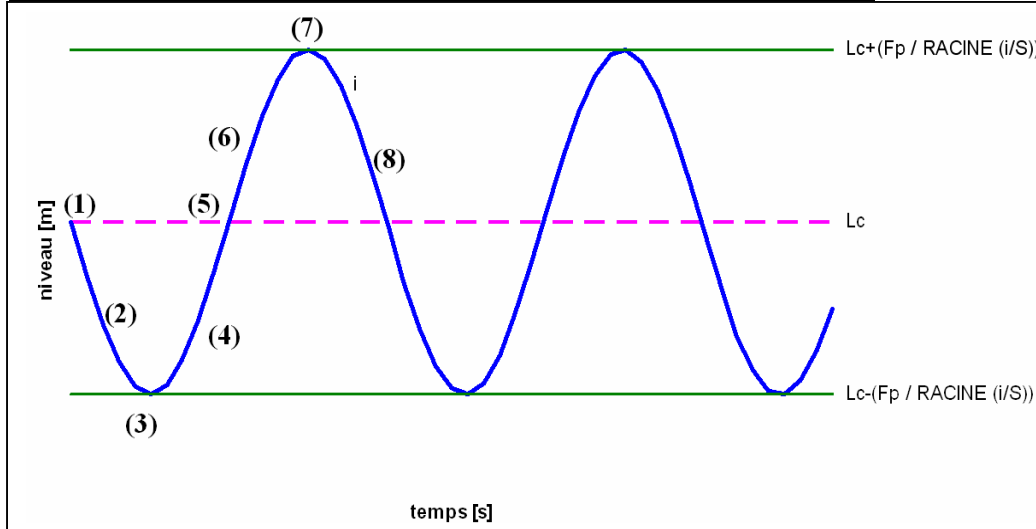
La limite en l'infini de $L(t)$ n'existe pas, on oscille autour du niveau de consigne.

ATTENTION on ne revient pas à la consigne, on oscille autour de la consigne.

Figure 23 : Allure de $L(t)$ avec une AI et une perturbation constante



On voit que $L(t)$ oscille autour de la valeur de consigne L_C . Si le coefficient de l'AI est plus élevé (comme i du graphique), la fréquence d'oscillation sera plus élevée et l'écart maximum entre le niveau et la consigne sera moindre. Nous avons donc tendance à vouloir augmenter la valeur de i pour diminuer l'écart maximum entre le niveau et la consigne mais le problème dans ce cas c'est que la fréquence augmente. Nous étions déjà tombé sur ce genre de compromis avec la régulation « tout ou rien », diminuer l'erreur tolérée entraînait une augmentation de la fréquence et donc nécessitait des composants plus performants.

Figure 24 : Courbe numérotée pour comprendre l'action intégrale


(1)	Lorsque $t=0$, le niveau $L(t)=L_c$, c'est une condition de départ. A ce moment là, l'AI vaut 0 car on intègre sur un intervalle de temps nul, dans ce cas $F_R(t)=0$ et donc le niveau chute avec une pente de $-F_p/S$ (cf cas S.R.).
(2)	Ici on s'est écarté de la consigne pendant un certain temps donc l'intégrale entre 0 et cet instant de $L(t)-L_c$ est négatif, ce qui correspond à une AI positive. Il y a donc $F_R(t)>0$ mais à cet instant $F_R(t)<F_p$ ce qui signifie que le niveau continue à descendre mais moins vite qu'au temps 0. A cet instant la vitesse de variation du niveau vaut $-(F_p - F_R(t))/S$.
(3)	Ici, comme on a continué à s'écarté de L_c , l'AI a continué à augmenter. L'AI a atteint une valeur telle que $F_R(t)=F_p$, ce qui signifie qu'à cet instant précis le niveau ne varie plus mais il est néanmoins inférieur à L_c .
(4)	Par rapport au point (3), l'AI a continué à augmenter car $L(t)$ est toujours inférieur à L_c . Ce qui a entraîné $F_R(t)>F_p$, ce qui se traduira bien par une augmentation de niveau.
(5)	Ici $L(t)=L_c$ mais nous sommes à l'instant où le niveau s'est écarté de la consigne pendant le plus de temps et donc où l'AI est maximale. Nous pourrions montrer qu'à cet instant $F_R(t)=2 \cdot F_p$ et donc la vitesse de variation du niveau vaut F_p/S .
(6)	A partir du point (5), le niveau est passé au dessus du niveau de consigne, ce qui signifie que la valeur de l'AI tend à diminuer ; mais comme l'AI n'as pas diminué suffisamment, nous sommes toujours dans le cas où $F_R(t)>F_p$ et donc le niveau continue à monter (mais moins vite qu'au point (5)).
(7)	Entre le point (6) et le point (7), le niveau est resté au dessus de L_c et donc l'AI a continué à diminuer ; en fait ici l'AI a égalé la perturbation et donc $F_R(t)=F_p$ et le niveau n'augmente plus. Comme il n'y a pas encore eu une période entière, l'intégrale entre 0 et cet instant de $L(t)-L_c$ est toujours négatif, ce qui correspond à une AI >0 .
(8)	Ici, nous nous approchons d'une période entière, et donc la valeur de l'AI est relativement faible, c'est la perturbation qui prend le dessus et le niveau chute. Enfin, lorsque une période entière se sera écoulée, l'AI sera nulle et le niveau chutera avec sa vitesse maximale $-F_p/S$, nous revenons à la situation du point (1).

Conclusions sur l'AI :

Nous sommes moyennement satisfait des résultats, nous ne revenons pas à la valeur de consigne mais nous oscillons autour de celle-ci ; donc si nous restons dans la marge d'erreur tolérée nous pourrions nous contenter de ce résultat.

Cependant, nous constatons un effet oscillatoire, ce qui est une particularité de l'AI. Pour cette raison l'AI n'est jamais utilisée seule.

Nous remarquons qu'en augmentant la valeur de i nous obtenons de meilleurs résultats mais au prix d'une fréquence d'oscillation supérieure (ce qui nécessite des composants plus performants).

Nous allons maintenant essayer de combiner l'AI et l'AP, l'idée est d'avoir une oscillation amortie.

3 Etude de l'AP&I – Cas d'une perturbation constante

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(12) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -p(L(t) - L_C)$ Action proportionnelle

$F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P$ Perturbation constante

(13) $L(t=0) = L_0 = L_C$ Supposition initiale

La résolution de l'équation différentielle du système est donnée à l'Annexe 6. Nous avons montré qu'il peut y avoir trois formes de solutions possibles pour l'expression de $L(t)$ suivant la valeur du discriminant de l'équation caractéristique.

De manière plus concrète nous avons vu que l'action proportionnelle et l'action intégrale contribuent toutes les deux à l'action de régulation mais qu'il peut y avoir plusieurs cas de figure. On pourrait par exemple avoir une action de régulation qui est constituée de « beaucoup » d'action proportionnelle et de « peu » d'action intégrale dans quel cas nous nous trouvons dans une régulation à prédominance de l'action proportionnelle.

Les trois formes obtenues pour l'expressions de $L(t)$ sont reprises ci-dessous :

Prédominance de l'action proportionnelle :

$$(14) \quad L(t) = L_C - \frac{2F_P}{\sqrt{p^2 - 4iS}} \cdot e^{-\frac{p}{2S} \cdot t} \cdot sh \left(\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S} \right)^2 - \frac{i}{S}} \right) t \right)$$

Equilibre entre l'action intégrale et l'action proportionnelle :

$$(15) \quad L(t) = L_C - \frac{F_P}{S} \cdot t \cdot e^{-\frac{p}{2S}t}$$

Prédominance de l'action intégrale :

$$(16) \quad L(t) = L_C - \frac{2F_P}{\sqrt{4 \cdot S \cdot i - p^2}} \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t\right)$$

Nous allons maintenant, pour chaque cas, analyser l'évolution du niveau $L(t)$.
 Nous essayerons de comprendre pourquoi l'allure de $L(t)$ correspond à son expression et enfin nous essayerons d'interpréter ce qui se passe concrètement.

1°) Prédominance de l'action proportionnelle $p > 2\sqrt{S \cdot i}$

L'expression que nous avons obtenu (voire Annexe 6) pour $L(t)$ est la suivante :

$$L(t) = L_C - \frac{2F_P}{\sqrt{p^2 - 4iS}} \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \cdot sh\left(\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) t\right)$$

On peut constater que les expressions entourées ci-dessus sont des constantes positives, dans ce cas l'expression simplifiée de $L(t)$ devient :

$$L(t) = L_C - A \cdot e^{-Bt} \cdot sh(Ct)$$

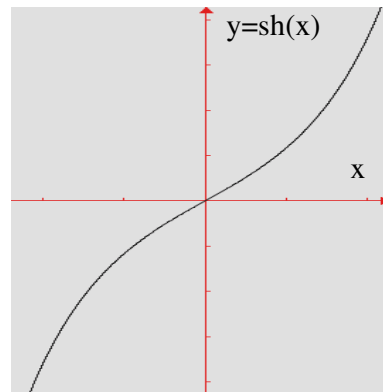
Remarque :

Le graphique de $y=sh(x)$ est donné ici à droite.

$sh(x)$ se lit « sinus hyperbolique » de x .
 Par définition, l'expression de $sh(x)$ est :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Remarquons que $sh(x = 0) = 0$



- 1^{ère} vérification : Nous vérifions que les conditions initiales sont vérifiées

Il faut donc vérifier si le niveau est au niveau de consigne à l'instant $t=0$.
 Il faudra aussi vérifier si la vitesse de variation du niveau = $-F_p/S$ à l'instant $t=0$.

$$L(t=0) = L_C \quad ? \quad \boxed{L(t=0) = L_C - A \cdot e^0 \cdot sh(0)}$$

→ OK c'est vérifié

$$\left(\frac{d(L(t) - L_C)}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{F_p}{S} \quad ?$$

On peut montrer que c'est vérifié. Le calcul de la dérivée a été fait à l'annexe 6.1, c'est d'ailleurs en vérifiant cette condition initiale que l'expression complète de $L(t)$ a pu être déterminée.

- 2^{ème} vérification : Nous calculons vers quoi tend $L(t)$ lorsque t tend vers l'infini de manière à vérifier si on tend à revenir à la consigne.

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = ?}$$

A première vue le calcul de la limite présente une forme indéterminée.

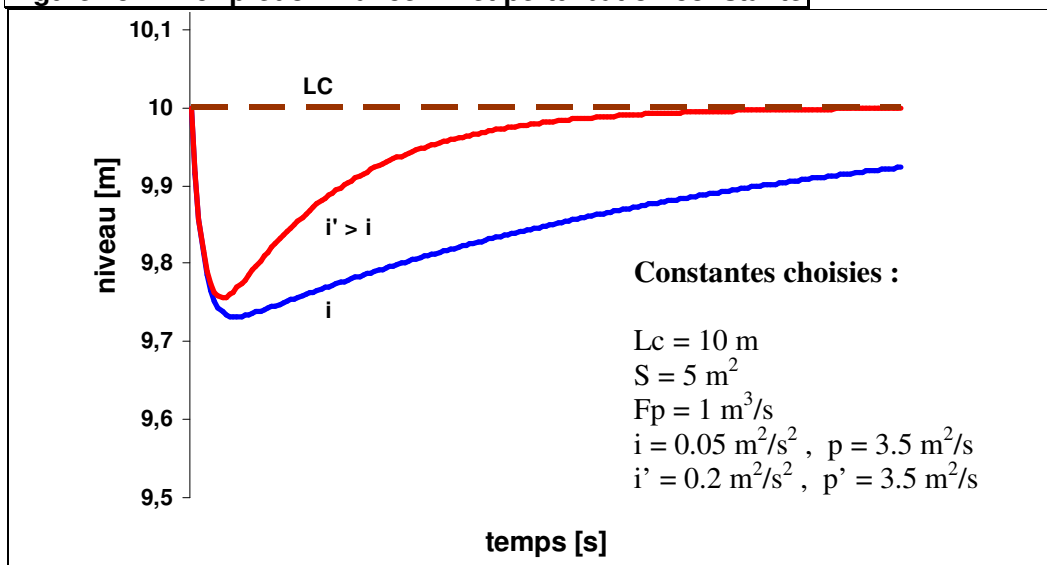
On peut lever l'indétermination en partant de la forme exponentielle du sinus hyperbolique et en tenant compte du fait que :

$$\frac{p}{2S} > \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}$$

On montre alors que le niveau $L(t)$ tend à revenir au niveau de consigne L_C .

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = L_C}$$

Figure 25 : AP&I prédominance AP et perturbation constante



Le graphique de $L(t)$ nous montre bien qu'à l'instant $t=0$ on est bien au niveau de consigne et que la limite à l'infini de $L(t)$ vaut également le niveau de consigne. On voit également que la pente de $L(t)$ à l'instant $t=0$ est négative et semble être la même pour les deux courbes ci-dessus. Elle est effectivement la même puisque la pente à l'instant $t=0$ ne dépend pas des paramètres « p » et « i », elle vaut $-F_p/S$.

Nous sommes satisfaits du résultat, nous avons une nette amélioration par rapport à l'action proportionnelle seule (AP) sur perturbation constante (Fig.22 p.21). Le début de la courbe est similaire mais au fur et à mesure que le temps pendant lequel le niveau reste éloigné de la consigne augmente, l'action intégrale prend de l'ampleur. En augmentant, l'action intégrale va contribuer de plus en plus à la régulation de niveau jusqu'à équilibrer les perturbations.

2°) Equilibre entre l'action proportionnelle et l'action intégrale $p = 2\sqrt{S \cdot i}$

L'expression que nous avons obtenue (voire Annexe 6) pour $L(t)$ est la suivante :

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{S} t \cdot e^{-\frac{p}{2S} t}$$

A
B

On peut constater que les expressions entourées ci-dessus sont des constantes positives, dans ce cas l'expression simplifiée de $L(t)$ devient :

$$L(t) = L_C - A \cdot t \cdot e^{-Bt}$$

- 1^{ère} vérification : Nous vérifions que les conditions initiales sont vérifiées

Il faut donc vérifier si le niveau est au niveau de consigne à l'instant $t=0$.
Il faudra aussi vérifier si la vitesse de variation du niveau = $-F_p/S$ à l'instant $t=0$.

$L(t=0) = L_C$? $L(t=0) = L_C - A \cdot 0 \cdot e^0$
→ OK c'est vérifié

$$\left(\frac{d(L(t) - L_C)}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{F_P}{S} \quad ?$$

On peut montrer que c'est vérifié. Le calcul de la dérivée a été fait à l'annexe 6.2, c'est d'ailleurs en vérifiant cette condition initiale que l'expression complète de $L(t)$ a pu être déterminée.

- 2^{ème} vérification : Nous calculons vers quoi tend $L(t)$ lorsque t tend vers l'infini de manière à vérifier si on tend à revenir à la consigne.

$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = ?$

A première vue le calcul de la limite présente une forme indéterminée. Cependant on peut prendre en compte le fait que pour le calcul d'une limite en l'infini, une fonction exponentielle l'emporte toujours sur un polynôme.

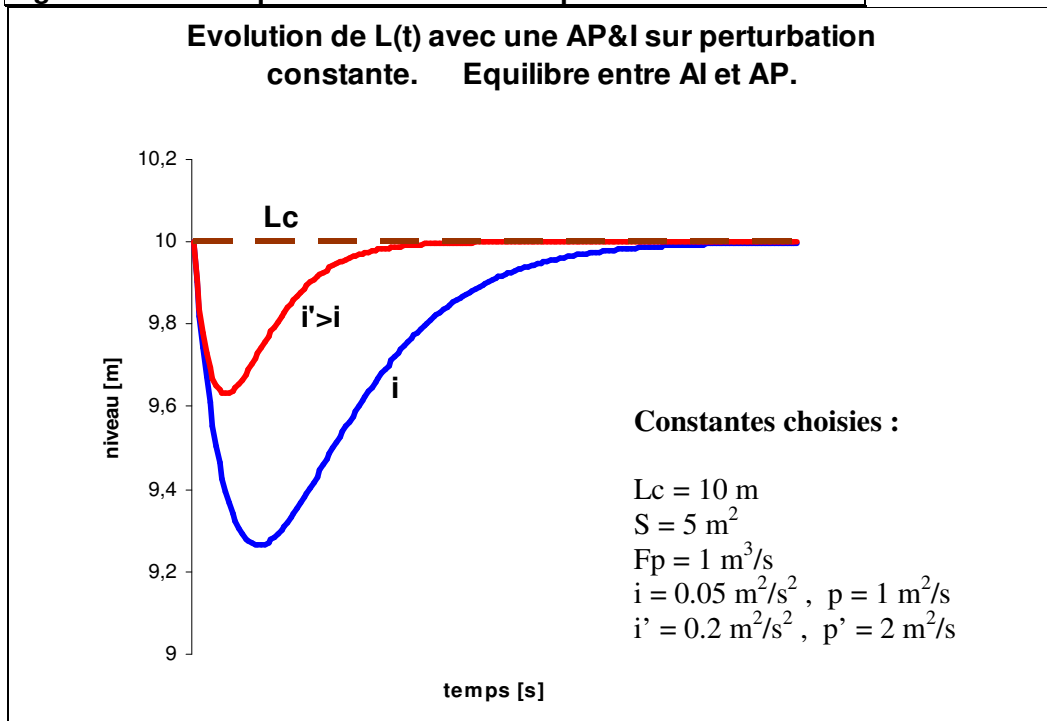
Dans ce cas :
$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (L_C - A \cdot t \cdot e^{-Bt}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (L_C - A \cdot e^{-Bt}) = L_C$$

Examinons à nouveau l'expression :

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{S} t \cdot e^{-\frac{p}{2S} t}$$

Pour des valeurs de t proches de 0, e^{-Bt} tend vers 1 et donc L(t) tend à décroître à vitesse constante avec une pente de F_P/S . Pour des valeurs plus élevées de t, l'exponentielle décroissante e^{-Bt} tend à décroître très vite et prendre le dessus sur le facteur t. Globalement c'est l'exponentielle qui l'emporte et L(t) tend vers le niveau de consigne L_C .

Figure 26 : AP&I Equilibre entre AI - AP et perturbation constante



Nous pouvons constater que lorsqu'on augmente i (et donc p également car l'équilibre entre AI et AP doit être conservé), le résultat est meilleur. En effet, pour $i' > i$, L(t) est toujours plus proche du niveau de consigne que pour i. Mais nous ne pouvons pas augmenter p et i indéfiniment, il existe une limite au-delà de laquelle il y a instabilité. Comme nous tendons à revenir vers le niveau de consigne, la valeur de l'AP va tendre vers zéro. Après un temps suffisant c'est donc l'AI qui tend à égaler la perturbation. C'est l'AI qui donne la touche finale.

3°) Prédominance de l'action intégrale $p < 2\sqrt{S \cdot i}$

L'expression que nous avons obtenu (voire Annexe 6) pour L(t) est la suivante :

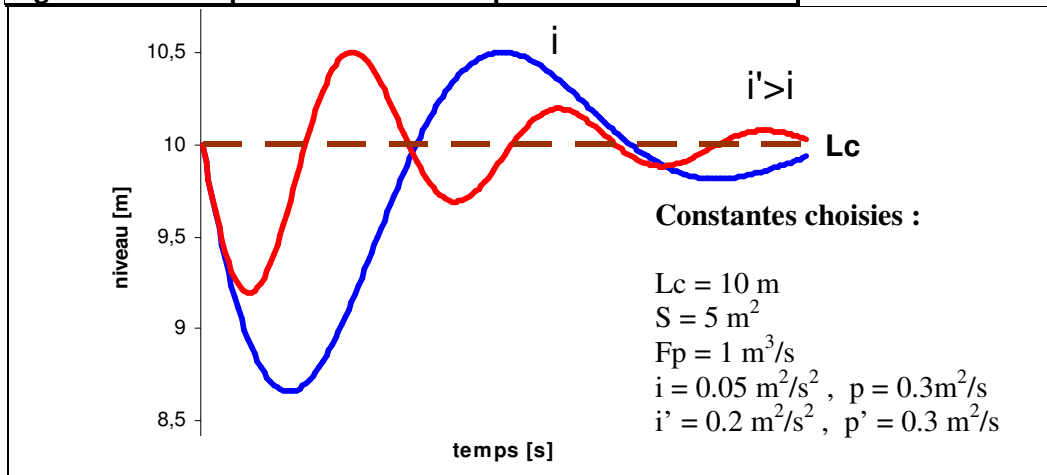
$$L(t) = L_C - \frac{2F_P}{\sqrt{4 \cdot S \cdot i - p^2}} e^{-\frac{p}{2S}t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t\right)$$

On peut constater que les expressions entourées ci-dessus sont des constantes positives, dans ce cas l'expression simplifiée de L(t) devient :

$$(17) \quad L(t) = L_C - A \cdot e^{-Bt} \cdot \sin(Ct)$$

Cette expression met en évidence que l'évolution du niveau en fonction du temps ressemble à une fonction sinusoïdale avec une composante continue : la consigne. Heureusement il ne s'agit pas exactement d'un sinus (comme pour l'AI) mais d'une fonction sinusoïdale dont l'amplitude varie en fonction du temps. L'expression (17) montre que l'amplitude « A » décroît de manière exponentielle avec le temps, ce qui se traduit par ce qu'on appelle une oscillation amortie.

Figure 27 : AP&I prédominance AI et perturbation constante



Nous voyons qu'en augmentant la valeur de i, la « fréquence » d'oscillation est plus grande ; on aurait pu s'en douter car on a vu que l'oscillation est le propre de l'AI. Comme il ne s'agit pas vraiment d'une fréquence (car la fonction n'est pas périodique) nous dirons que c'est une pseudo fréquence f* .

Dans l'ensemble nous sommes satisfait avec les différents résultats car nous revenons toujours vers la consigne mais certains cas de figure montrent que l'on se stabilise plus vite vers la consigne. Le choix des valeurs de réglages p et i dépendra du résultat mais aussi de l'application.

Nous constatons une amélioration par rapport à l'AP ou à l'AI. Nous pourrions également montrer qu'avec une perturbation linéairement croissante, une AP&I amène L(t) à tendre vers un écart permanent.

Conclusions sur l'AP&I

Le tableau ci-dessous donne un résumé de l'évolution du niveau pour différents types de perturbations et ce pour différentes actions. On constate que l'AP apporte un plus par rapport au cas sans régulation, elle est satisfaisante dans le cas d'une perturbation momentanée et limite la casse dans le cas d'une perturbation constante. Si on regarde les résultats pour l'AI, on constate une oscillation à tous les niveaux, c'est la raison pour laquelle on ne l'utilise jamais seule (sans l'appui d'une autre action) ; cependant il y a une nette amélioration par rapport au cas sans régulation. La dernière colonne montre les résultats dans le cas où l'on combine l'AP et l'AI, on voit que parmi les autres colonnes, c'est la régulation qui donne les meilleurs résultats. En effet, on revient au niveau de consigne même avec une perturbation constante. Le seul inconvénient c'est qu'il est plus complexe à mettre en œuvre.

Type de perturbation	S.R. (sans régulation)	AP (action proportionnelle)	AI (action intégrale)	AP&I (action proportionnelle et intégrale)
Perturbation momentanée et instantanée	Le niveau conserve un écart permanent	Le niveau tend à revenir au niveau de consigne	Oscillation autour du niveau de consigne	Le niveau tend à revenir au niveau de consigne
Perturbation constante	Il y a un écart linéairement croissant entre le niveau et la consigne	On tend vers un écart permanent	Oscillation autour du niveau de consigne	Le niveau tend à revenir au niveau de consigne
Perturbation linéairement croissante	On a l'écart entre le niveau et la consigne qui augmente proportionnellement à t^2	On tend un écart linéairement croissant entre le niveau et la consigne	Oscillation autour d'un écart par rapport à la consigne	On tend vers un écart permanent

4 Etude de l'AD (action dérivée) – Perturbation constante

L'idée d'une régulation par action dérivée est d'apporter une correction qui dépend de la vitesse à laquelle le niveau s'éloigne de la consigne.

Mathématiquement cela donne :

$$AD(t) = F_{IN}(t) = F_R(t) = -d \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt}$$

Où d est le coefficient de l'action dérivée, il reflète le réglage de l'AD

Il s'agit donc d'une action de régulation de type correctrice (le signe – indique une action de correction), qui prend en compte la différence entre le niveau et la consigne et qui tend compte de la dérivée par rapport au temps de l'erreur (ou de la vitesse de variation de l'erreur).

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(18) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -d \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt}$ Action dérivée

(19) $F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P$ Perturbation constante

(20) $L(t=0) = L_0 = L_C$ Supposition initiale

On obtient l'équation de L(t) :

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{S + d} \cdot t$$

La résolution est donnée à l'annexe 7.

Nous pouvons constater que nous avons bien l'équation d'une droite de la forme $y = ax + b$ où la variable $y=L(t)$ et la variable x est le temps.

La pente de la droite est : $-\frac{F_P}{S + d}$

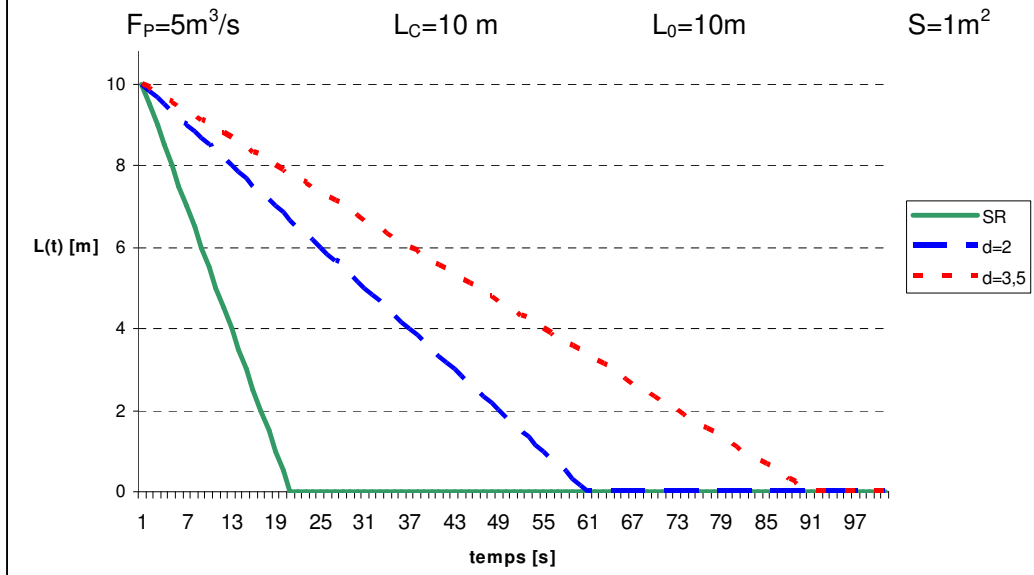
Remarque : Sans régulation (SR), nous avons trouvé : $L(t) = L_C - \frac{F_P}{S} \cdot t$

Il s'agit toujours d'une droite mais dont la pente est plus grande en valeur absolue qu'avec une action dérivée.

Figure 28 : Graphique de L(t) pour AD et perturbation constante

Le graphique ci-dessous met en évidence l'influence du coefficient d'action dérivée sur l'évolution du niveau L(t).

Pour le graphique ci-dessous, les données considérées sont :



Nous constatons que le comportement n'a pas changé par rapport au cas SR, nous avons dans les deux cas le niveau qui chute à vitesse constante. Néanmoins avec l'AD le niveau chute moins vite.

L'AD a amélioré la situation par rapport au cas SR mais n'est jamais utilisée seule car elle ne permet pas de revenir au niveau de consigne. La raison de cela est que pour revenir au niveau de consigne, il faudrait que l'AD égalise la perturbation alors que dès que l'on ne s'éloigne plus de la consigne, l'AD=0.

5 Etude de l'AP&D – Cas d'une perturbation constante

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

$$(20) \quad F_{IN}(t) = F_R(t) = -d \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} - p(L(t) - L_C) \quad \text{APD}$$

$$(21) \quad F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P \quad \text{Perturbation constante}$$

(22) $L(t = 0) = L_0 = L_C$

Supposition initiale

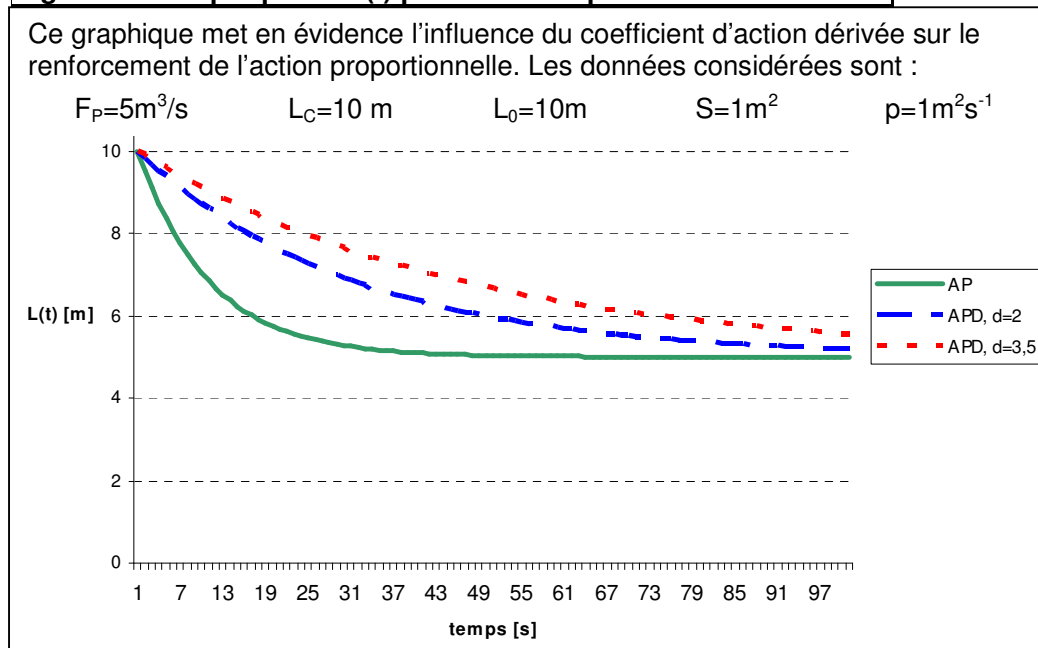
On obtient l'équation de $L(t)$:
$$\Rightarrow L(t) = L_C - \frac{F_P}{p} \cdot (1 - e^{-\frac{p}{s+d} \cdot t})$$

La résolution est donnée à l'annexe 8.

Si l'on compare l'expression de $L(t)$ que nous venons de trouver avec l'expression résolue dans le cas d'une action proportionnelle (annexe 3), nous constatons qu'elles sont quasi identiques. L'action dérivée renforce l'action proportionnelle.

Tout se passe de la même manière qu'avec l'AP mais avec un temps caractéristique plus long. On aurait pu augmenter la valeur de p de l'AP pour tendre vers un écart permanent plus petit mais il y a une valeur de p limite à ne pas dépasser.

Figure 29 : Graphique de $L(t)$ pour AP&D et perturbation constante



Conclusions sur l'AP&D

- L'AD n'est jamais utilisée seule, elle n'est pas capable d'égaliser en permanence la perturbation tout en conservant le niveau de consigne. Avec l'AD ces deux résultats sont contradictoires car égaliser la perturbation implique que l'on s'éloigne du niveau de consigne.
- L'action dérivée renforce l'action proportionnelle.
- L'action dérivée n'est utilisée que lorsqu'il y a également une action proportionnelle. Une action type AID n'est jamais utilisée car est d'office instable.

6 L'action PID

C'est le type de régulation le plus complet donc le meilleur lorsqu'il est bien utilisé. L'inconvénient c'est qu'il est évidemment plus complexe. C'est avec l'APID qu'il y a le plus de réglages possibles. Parfois il faut augmenter l'ordre du régulateur et faire par exemple une action de type PI^2D ; ce qui signifie qu'il y a en plus de action P et D, une action qui dépend de l'intégrale double (sur le temps) de l'erreur entre le niveau et la consigne. On peut imaginer PI^3D avec intégrale triple...

7 L'ordre d'un régulateur

Nous dirons qu'un régulateur de type PID est un régulateur du premier ordre alors qu'un régulateur de type PI^2D est un régulateur du deuxième ordre.

PID	→	ordre 1
PI^2D	→	ordre 2
PI^3D	→	ordre 3
PI^4D	→	ordre 4
...		

Il est bon de savoir les circonstances qui font que nous avons besoin d'un régulateur de tel ou tel ordre. Imaginons que dans notre exemple nous avons une perturbation constante, si nous avons une APID nous revenons à la valeur de consigne ; par contre si nous avons affaire à une perturbation linéairement croissante le niveau tend vers un écart permanent, il faut alors une action PI^2D pour revenir à la consigne. Nous pouvons en déduire que **l'ordre de la perturbation** influence l'ordre nécessaire au régulateur. Un autre élément qui influence l'ordre d'un régulateur est **la tolérance acceptée par rapport à la consigne**, si nous acceptons un écart permanent, il se pourrait que même dans le cas d'une perturbation linéairement croissante, une APID soit satisfaisante.

Dans tous les calculs que nous avons fait, nous avons considéré que la consigne était constante mais en réalité elle peut évoluer. Nous comprenons intuitivement que le fait que la consigne change rendra plus difficile la régulation. En fait si la consigne est susceptible de varier linéairement, il faut augmenter l'ordre du régulateur de 1, si elle est susceptible de varier en t^2 , il faut augmenter l'ordre du régulateur de 2. En résumé il faudra tenir compte de **l'ordre associé au type de variation de la consigne**.

Un autre élément important est **l'ordre de l'équation différentielle** du système physique, dans notre exemple il est de 1 mais s'il avait été de 2, il aurait fallu augmenter l'ordre du régulateur de 1 ; s'il avait été de 3, il aurait fallu augmenter l'ordre du régulateur de 2...

8 Les types de régulateurs rencontrés

Nous avons vu par exemple que l'AD n'est jamais utilisée seule, nous allons voir ce qu'il en est pour les différents cas :

Type d'action	Utilisé ?	Explication
P	OUI	Possibilité d'action limitée mais relativement simple. Pas d'oscillation.
I	NON	Rien n'empêche de l'utiliser mais comme entraîne d'office une oscillation, pas utilisé en pratique.
D	NON	Pas très fameux seul.
PI	OUI	Permet de résoudre pas mal de problèmes.
PD	OUI	Avec D, l'AP est meilleure.
ID	NON	Comportement oscillatoire intrinsèque.
PID	OUI	Le meilleur, toutes les possibilités d'action. Mais également le plus complexe.

9 Expression des actions P, I, D

Jusqu'à maintenant nous avons toujours considéré :

- L'action intégrale :
$$AI = AI(t) = -i \cdot \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt$$
- L'action dérivée :
$$AD = AD(t) = -d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$
- L'action proportionnelle :
$$AP = AP(t) = -p \cdot \varepsilon(t)$$

Où $\varepsilon(t)$ est l'erreur (la différence entre le niveau et la consigne).

Nous avons les coefficients de l'AI, l'AD et l'AP qui étaient respectivement i , d et p . Les coefficients représentant les quantités respectives de l'AI, l'AD et l'AP.

Cependant, ce qui est gênant c'est que l'unité de ces coefficients dépend de l'équation différentielle du système physique.

Dans notre exemple nous avons pour l'APID :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \left(-p \cdot \varepsilon(t) - i \cdot \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt - d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} - F_p(t) \right)$$

Avec $(1/S)$ qui peut être considéré comme le gain du système.

Nous allons nommer $r(t)$ l'expression qui reflète l'action de régulation et qui prend en compte le gain du système :

$$r(t) = G \left(-p \cdot \varepsilon(t) - i \cdot \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt - d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$$

Avec $G = (1/S)$ qui est le gain du système.

Cette expression de $r(t)$ montre bien les paramètres de la régulation PID, il s'agit bien sûr de p , i et d . Cependant, en régulation, il est courant de travailler avec un réglage global du gain du système soumis à la régulation. Nous appellerons ce réglage global du gain G' , celui-ci va alors englober le coefficient de l'action proportionnelle p .

L'expression de $r(t)$ peut alors mise sous la forme :

$$r(t) = -G' \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_I} \cdot \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt + T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$$

Où le signe « - » indique une action de correction.

$G'=G.p$ est le gain du système soumis à la régulation

Cette dernière expression de $r(t)$ fait toujours apparaître 3 réglages mais le réglage du coefficient de l'action proportionnelle n'existe plus, il est inclus dans le réglage global du gain G' . Par ailleurs les réglages liés aux actions intégrales et dérivées sont maintenant respectivement T_I et T_D . Ces nouveaux paramètres de la régulation PID (le temps d'intégration T_I et le temps de dérivation T_D) ont plusieurs avantages :

- L'unité est toujours la seconde[s], elle ne dépend plus du système.
- Ces réglages sont relatifs à l'action proportionnelle.

Les contributions des AP, AI et AD sont alors :

$$r(t) = -G \cdot p \left(\underbrace{\varepsilon(t)}_{AP} + \underbrace{\frac{1}{T_I} \cdot \int_0^t \varepsilon(t) \cdot dt}_{AI} + \underbrace{T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt}}_{AD} \right)$$

Les coefficients deviennent :

1	pour l'AP	- c'est la référence
T_I	pour l'AI.	- l'AI augmente si T_I diminue
T_D	pour l'AD.	- l'AD augmente si T_D augmente

Interprétation du T_I : Si on suppose que l'on ait affaire à un écart constant, T_I est le temps que met l'AI pour atteindre la valeur de l'AP.

ANNEXE 1 : AP sur perturbation momentanée, résolution.

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(A1.1) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -p(L(t) - L_C)$ Action proportionnelle

$F_{OUT}(t) = F_P(t) = 0$ Perturbation momentanée

(A1.2) $L(t=0) = L_0 \neq L_C$ Perturbation instantanée

Pour simplifier, nous considérerons pour la suite que la consigne est une constante.

En remplaçant $F_{IN}(t)$ et $F_{OUT}(t)$ par leurs expressions, on trouve :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (-p(L(t) - L_C)) \iff \frac{dL(t)}{dt} = -\frac{p}{S} (L(t) - L_C)$$

De manière à simplifier la résolution, nous allons faire apparaître le fait qu'ajouter ou soustraire une constante à une fonction ne change rien à sa dérivée.

Dans ce cas : $\frac{dL(t)}{dt} = \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} = -\frac{p}{S} (L(t) - L_C)$

Nous allons maintenant réarranger l'équation de manière à mettre dans le membre de gauche tout ce qui concerne $(L(t) - L_C)$. L'idée est de trouver l'expression de $L(t) - L_C$ pour ensuite isoler $L(t)$ et avoir enfin son expression en fonction du temps.

$$\frac{d(L(t) - L_C)}{L(t) - L_C} = -\frac{p}{S} dt$$

En intégrant les deux membres, on trouve :

$$\int \frac{1}{L(t) - L_C} \cdot d(L(t) - L_C) = \int -\frac{p}{S} \cdot dt \quad (A1.3)$$

Nous savons par ailleurs que $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + K$ avec $K =$ une constante

Ce qui nécessite de prendre en compte le signe de x si on veut pouvoir ôter la valeur absolue. On a dans ce cas :

$$\text{Si } x > 0 \quad \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + K \quad \text{si } x < 0 \quad \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(-x) + K$$

Dans notre cas, si on se réfère à l'équation (A1.3), on remarque que c'est le signe de $L(t)-L_C$ qu'il faut examiner de manière à résoudre l'intégrale indéfinie sans avoir de valeur absolue dans le résultat.

On peut montrer que dans notre cas $L(t)-L_C$ doit toujours être négatif car on considère que l'action de régulation (qui vaut $F_{IN}(t)$) doit toujours être positive. En effet, l'équation (A1.1) de la page précédente montre bien que le signe de $F_{IN}(t)$ ne peut être positif que si $(L(t)-L_C)$ est négatif.

En tenant compte que $(L(t)-L_C)$ est négatif, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \ln(L_C - L(t)) + K_1 &= -\frac{p}{s} \int 1 \cdot dt \\ \Rightarrow \ln(L_C - L(t)) + K_1 &= -\frac{p}{s} \cdot (t + K_2) \\ \Rightarrow \ln(L_C - L(t)) + K_1 &= -\frac{p}{s} \cdot t + K_3 \\ \Rightarrow \ln(L_C - L(t)) &= -\frac{p}{s} \cdot t + K_4 \end{aligned}$$

Où K_1, K_2, K_3, K_4 sont des constantes.

Hélas la dernière expression ne nous donne pas directement l'expression de $(L_C-L(t))$ mais $\ln(L_C-L(t))$

Pour obtenir $(L(t)-L_C)$ il faut utiliser une astuce basée sur les faits suivants :

- Si $A=B$, $e^A = e^B$
- Si $A > 0$, $e^{\ln A} = A$

En prenant l'exponentielle en base e de chaque membre de notre dernière équation :

$$\begin{aligned} e^{\ln(L_C - L(t))} &= e^{-\frac{p}{s} \cdot t + K_4} \\ \Rightarrow e^{\ln(L_C - L(t))} &= e^{-\frac{p}{s} \cdot t} \cdot e^{K_4} \\ \Rightarrow L_C - L(t) &= K_5 \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot t} \\ \Rightarrow L(t) &= L_C - K_5 \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot t} \end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer la constante K_5 pour avoir l'expression complète de $L(t)$, pour ce faire il faut faire apparaître une information supplémentaire qui provient des conditions initiales. Nous allons donc intégrer l'équation (A1.2) page précédente qui précise que le niveau $L(t)$ à l'instant $t=0$ vaut L_0 (et est différent de L_C).

$$L(t = 0) = L_0 = L_C - K_5 \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot 0} = L_C - K_5$$

$$\Rightarrow K_5 = L_C - L_0$$

On obtient enfin l'équation de L(t) :

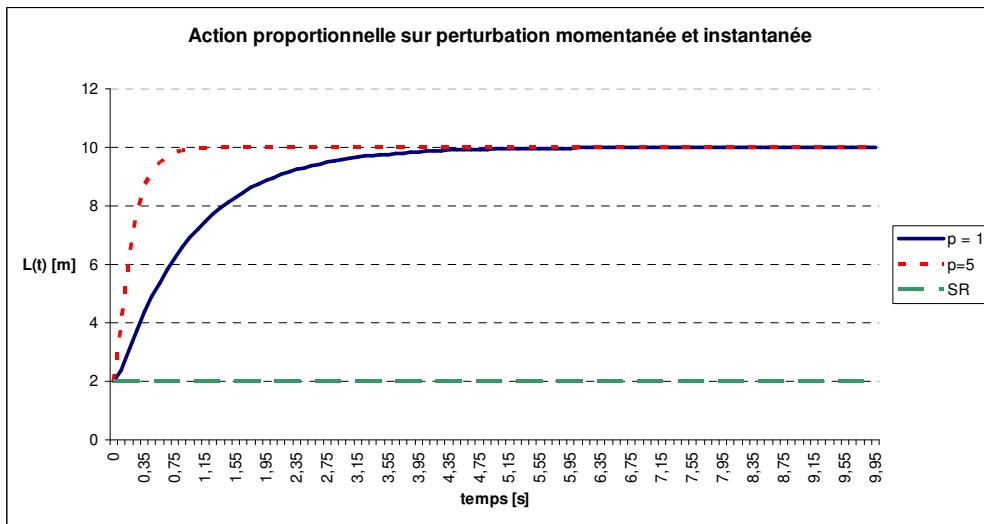
$$L(t) = L_C - (L_C - L_0) \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot t}$$

Le graphique ci-dessous met en évidence l'influence du coefficient d'action proportionnel sur l'évolution du niveau L(t).
 Pour le graphique ci-dessous, les données considérées sont :

$L_C = 10 \text{ m}$

$L_0 = 2 \text{ m}$

$S = 1 \text{ m}^2$



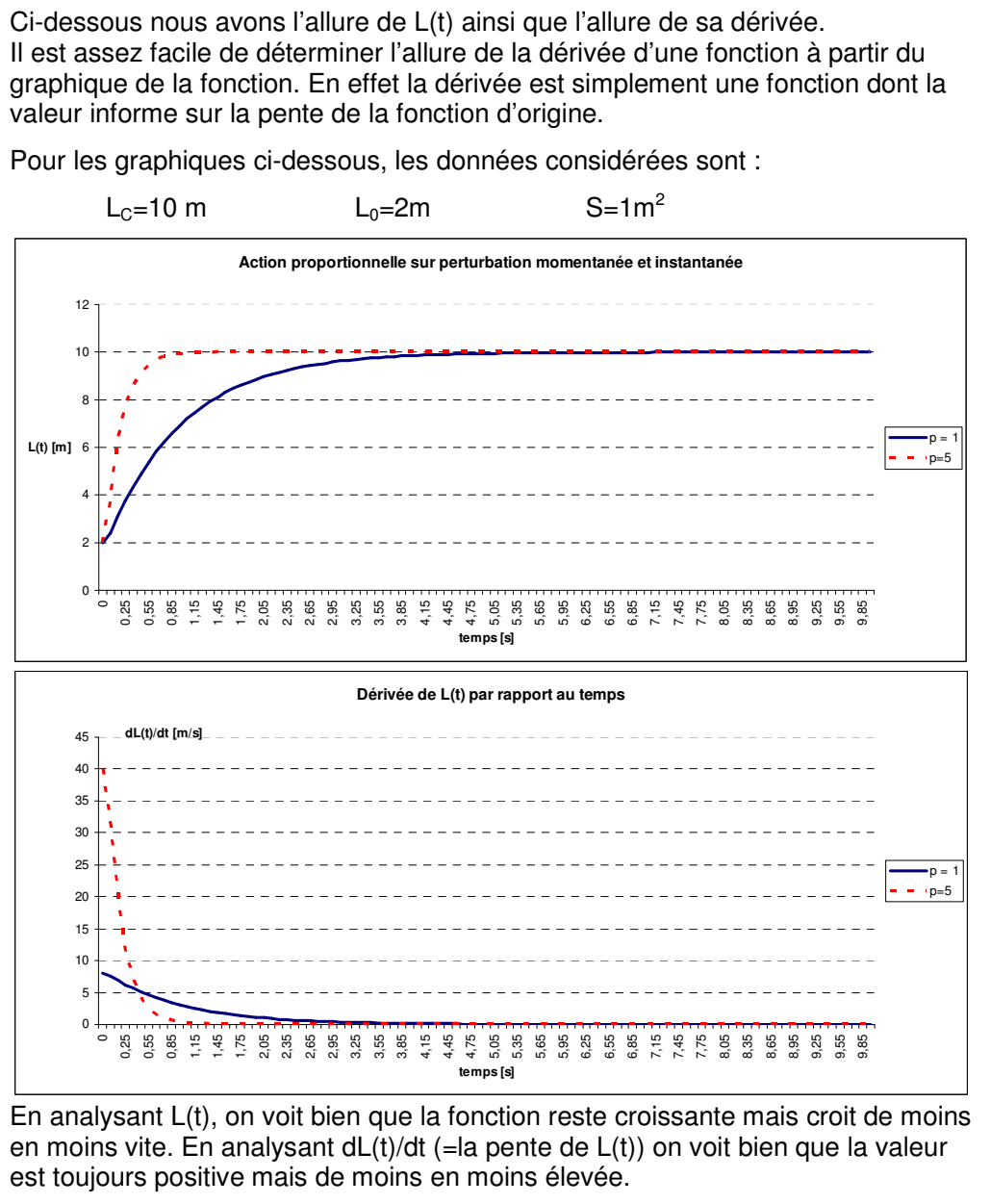
ANNEXE 2 : AP sur perturbation momentanée, justification.

Expliquons que l'allure de L(t) est en accord avec l'équation différentielle :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

- Représentons la courbe qui correspond au membre de gauche :
 Nous allons nous baser sur l'allure de L(t) (voir annexe1) pour représenter l'allure de sa dérivée par rapport au temps, nous avons ainsi une courbe qui correspond au membre de gauche de l'équation différentielle du système.

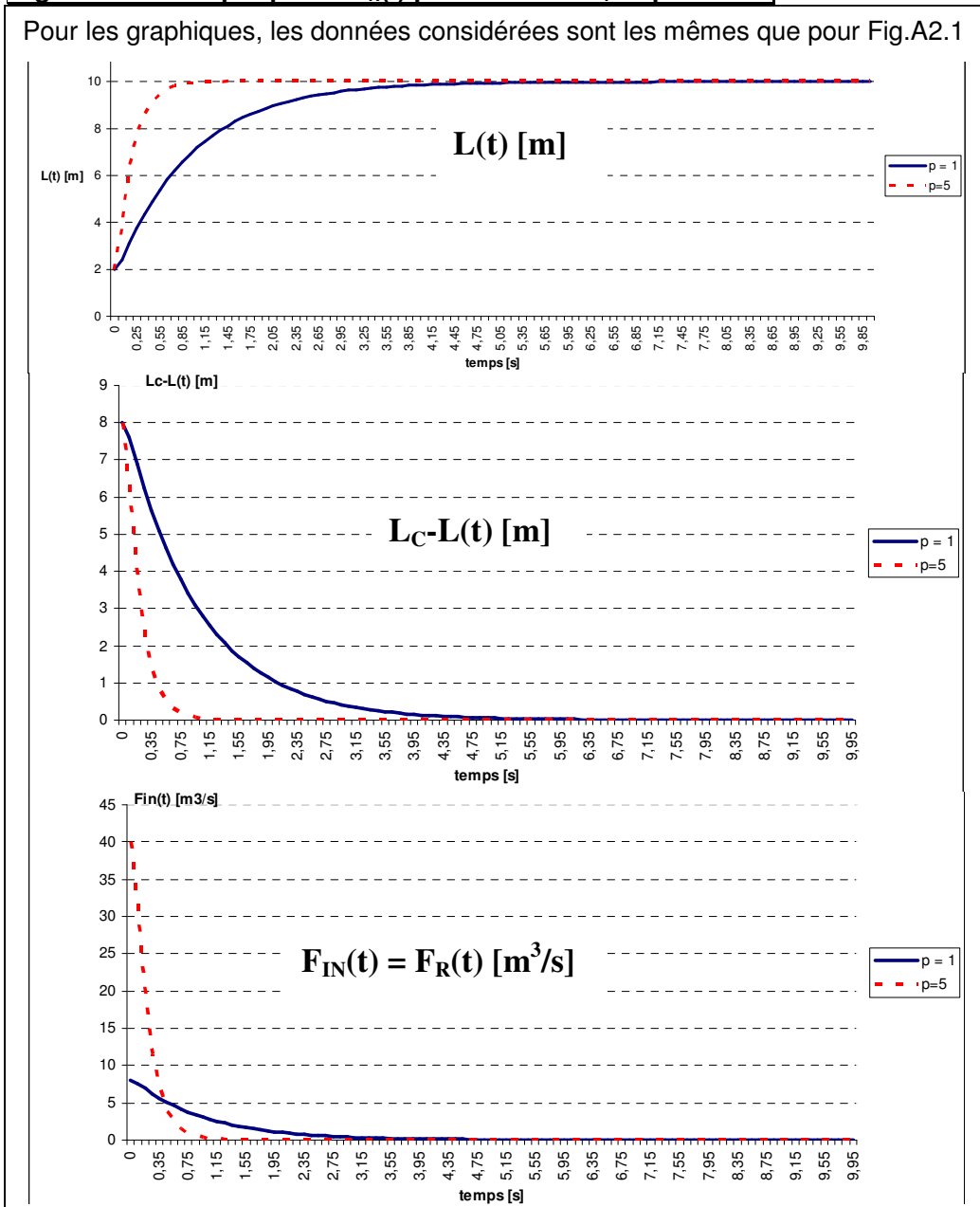
Figure A2.1 : Graphique de L(t) et sa dérivée pour AP avec $F_p=0$ pour $t \neq 0$



- Représentons une courbe dont l'allure correspond au membre de droite :
 Comme S est une constante et que $F_{OUT}(t) = 0$, l'allure du membre de droite de l'équation différentielle du système sera semblable à l'allure de $F_{IN}(t)$.
 Pour représenter $F_{IN}(t) = F_R(t)$, nous utiliserons la formule de l'AP ci-dessous :

$$F_R(t) = -p(L(t) - L_C) = p(L_C - L(t))$$

Figure A2.2 : Graphique de $F_R(t)$ pour AP avec $F_P=0$ pour $t \neq 0$



La comparaison des figures A2.1 et A2.2 montre bien que l'allure de $L(t)$ est bien en accord avec l'équation différentielle du système. En effet les courbes qui correspondent au membre de gauche et au membre de droite de l'équation différentielle du système ont une allure tout à fait identique.

ANNEXE 3 : AP sur perturbation constante, résolution.

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(A3.1) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -p(L(t) - L_C)$ Action proportionnelle

$F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P$ Perturbation constante

(A3.2) $L(t=0) = L_0 = L_C$ Supposition initiale

En remplaçant $F_{IN}(t)$ et $F_{OUT}(t)$ par leurs expressions, on trouve :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (-p(L(t) - L_C) - F_P)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL(t)}{dt} = -\frac{p}{S} (L(t) - L_C + \frac{F_P}{p})$$

De manière à simplifier la résolution, nous allons faire apparaître le fait qu'ajouter ou soustraire une constante à une fonction ne change rien à sa dérivée.

(A3.3) Dans ce cas : $\frac{dL(t)}{dt} = \frac{d(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p})}{dt} = -\frac{p}{S} (L(t) - L_C + \frac{F_P}{p})$

Pour simplifier la résolution de l'équation différentielle, nous allons poser :

(A3.4) $y(t) = y = L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}$

L'équation différentielle (A3.3) devient alors (A3.5): $\frac{dy}{dt} = -\frac{p}{S} \cdot y$

Nous allons donc commencer par résoudre cette équation différentielle simplifiée de manière à obtenir l'expression de $y(t)$. Ensuite il suffira de remplacer $y(t)$ par son expression équivalente donnée en (A3.4) de manière à isoler $L(t)$.

Partons de l'équation (A3.5) et mettons tout ce qui concerne y dans le membre de gauche, on obtient alors :

$$(A3.6) \quad \boxed{\frac{1}{y} \cdot dy = -\frac{p}{s} \cdot dt}$$

En intégrant les deux membres, on trouve : (A3.7) $\boxed{\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int -\frac{p}{s} \cdot dt}$

Nous savons par ailleurs que $\boxed{\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + K}$ avec K = une constante

Ce qui nécessite de prendre en compte le signe de x si on veut pouvoir ôter la valeur absolue. On a dans ce cas :

Si $x > 0$ $\boxed{\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + K}$ si $x < 0$ $\boxed{\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(-x) + K}$

Nous allons donc résoudre l'équation (A3.7) en considérant dans un 1^{er} cas que y est positif puis en considérant que y est négatif.

- Considérons y positif

L'équation (A3.7) devient alors :

$$\boxed{\ln y + K_1 = -\frac{p}{s} \cdot t + K_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln y = -\frac{p}{s} \cdot t + K_3}$$

Prenons l'exponentielle en base e de chaque membre de l'équation, on trouve alors :

$$\boxed{y = e^{-\frac{p}{s} \cdot t + K_3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = K \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot t}} \quad (A3.8)$$

En prenant en compte de la valeur posée pour y (A3.4), on trouve :

$$\boxed{L(t) - L_C + \frac{F_P}{p} = K \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot t}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{L(t) = K \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot t} + L_C - \frac{F_P}{p}}$$

La constante K peut alors être déterminée à l'aide des conditions initiales.

Les conditions initiales ont été exprimées en (A3.2), il s'agit de : $L(t=0) = L_0 = L_C$

Il faut donc vérifier :
$$\boxed{L(t=0) = L_C = K \cdot e^{-\frac{p}{s} \cdot 0} + L_C - \frac{F_P}{p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_C = K + L_C - \frac{F_P}{p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{F_P}{p}}$$

$$(A3.9) \quad \Rightarrow L(t) = L_C - \frac{F_P}{p} \cdot (1 - e^{-\frac{p}{S} \cdot t})$$

- Considérons y négatif L'équation (A3.7) devient alors :

$$\ln(-y) + K_1 = -\frac{p}{S} \cdot t + K_2 \quad \Rightarrow \ln(-y) = -\frac{p}{S} \cdot t + K_3$$

Prenons l'exponentielle en base e de chaque membre de l'équation, on trouve alors :

$$-y = e^{-\frac{p}{S} \cdot t + K_3} \quad \Rightarrow -y = K_4 \cdot e^{-\frac{p}{S} \cdot t} \quad \Rightarrow y = K \cdot e^{-\frac{p}{S} \cdot t} \quad (A3.10)$$

On peut constater que le fait d'avoir considéré y comme négatif ou positif ne change rien à l'expression mathématique obtenue.

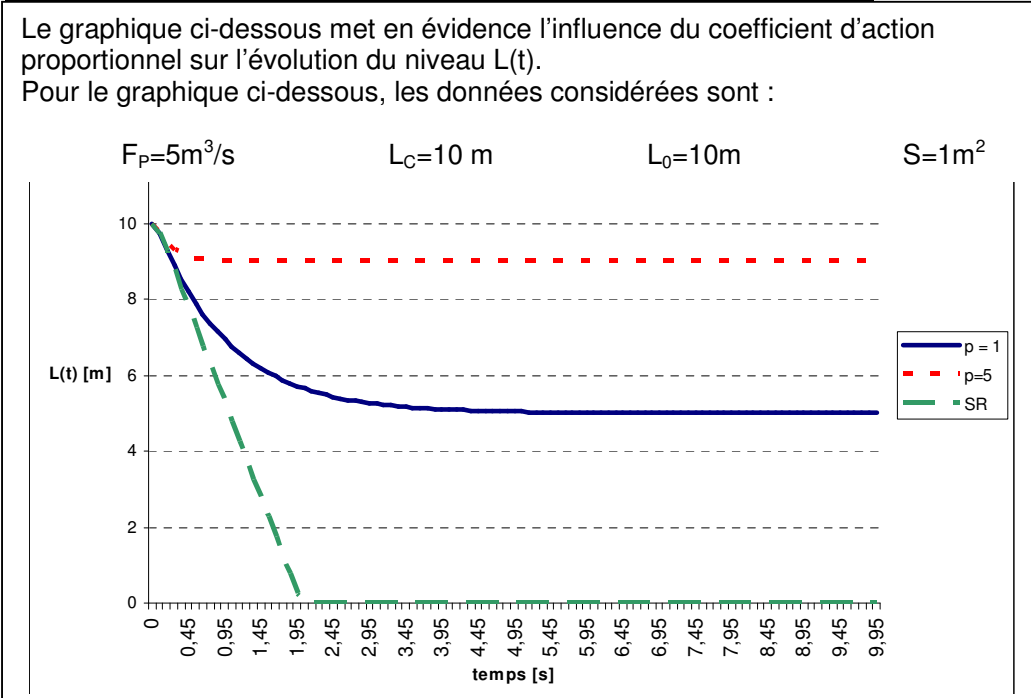
En effet les formules (A3.8) et (A3.10) sont identiques.

Une fois les conditions initiales considérées, on obtient une unique expression pour L(t) :

(A3.11)

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{p} \cdot (1 - e^{-\frac{p}{S} \cdot t})$$

Figure A3.1 : Graphique de L(t) pour AP et perturbation constante



On peut voir qu'en absence de régulation le niveau chute à vitesse constante (cas du trou dans la cuve). On peut montrer que la pente de L(t) vaut dans ce cas $-F_P/S$

ANNEXE 4 : AI sur perturbation constante, résolution.

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

$$(A4.1) \quad F_{IN}(t) = F_R(t) = -i \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt \quad \text{AI}$$

$$(A4.2) \quad F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P \quad \text{Perturbation constante}$$

$$(A4.3) \quad L(t=0) = L_0 = L_C \quad \text{Supposition initiale}$$

Insérons les expressions de $F_{IN}(t)$ et de $F_{OUT}(t)$ données en (A4.1) et (A4.2) au sein de l'équation différentielle du système. On obtient alors :

$$(A4.4) \quad \frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times \left(-i \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt - F_P \right)$$

$$(A4.5) \quad \Leftrightarrow \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} = -\frac{i}{S} \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt - \frac{F_P}{S}$$

Car ajouter une constante ne modifie pas la dérivée.

Nous avons ici une équation intégro-différentielle, nous allons dériver chaque membre par rapport au temps pour avoir une équation différentielle d'ordre 2 :

$$(A4.6) \quad \Rightarrow \frac{d^2(L(t) - L_C)}{dt^2} = -\frac{i}{S} \cdot (L(t) - L_C)$$

Pour simplifier la résolution de l'équation différentielle, posons :

$$(A4.7) \quad y(t) = y = L(t) - L_C$$

L'équation différentielle (A4.6) devient alors :

$$(A4.8) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{i}{S} \cdot y$$

Nous allons maintenant chercher l'expression de $y(t)$ puis remplacer $y(t)$ par $L(t) - L_C$ de manière à pouvoir isoler $L(t)$ et ainsi obtenir son expression mathématique.

Ordonnons l'équation différentielle (A4.8) suivant un degré décroissant :

$$(A4.9) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{i}{S} \cdot y = 0$$

Réolvons l'équation caractéristique associée à l'équation A4.9 (voir Annexe 5 pour la théorie) :

$$r^2 + \frac{i}{S} = 0 \quad \Rightarrow r = \pm j \cdot \sqrt{\frac{i}{S}}$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont deux nombres imaginaires conjugués, ce qui signifie que notre fonction de notre équation différentielle est une somme pondérée de sinus et cosinus (voir Annexe 5).

$$(A4.10) \quad \Rightarrow y(t) = L(t) - L_C = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S}} \cdot t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{i}{S}} \cdot t\right)$$

C_1 et de C_2 doivent ensuite être déterminées à l'aide de deux conditions initiales :

$$(L(t) - L_C)_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d(L(t) - L_C)}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{F_P}{S}$$

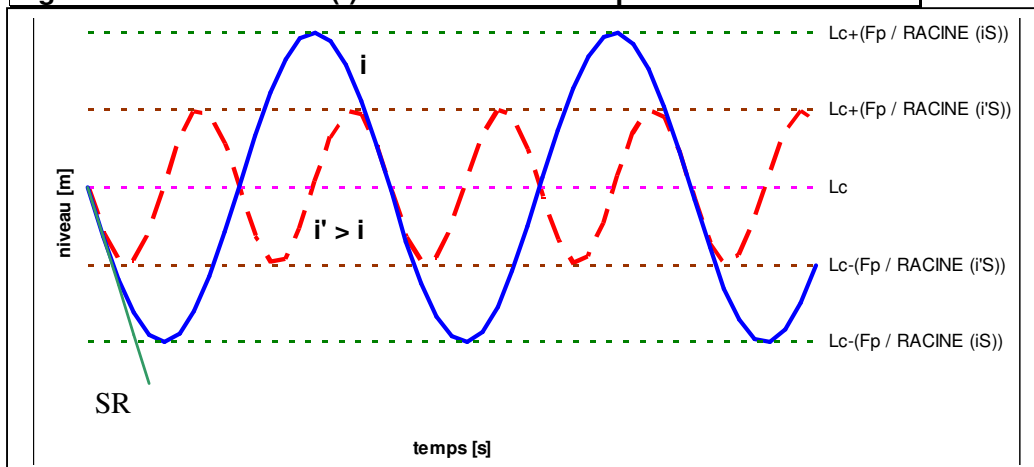
En insérant ces conditions au sein De l'équation A4.10, on trouve :

$$C_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_1 = -\frac{F_P}{\sqrt{i \cdot S}}$$

En remplaçant C_1 et C_2 par leurs valeurs au sein de l'équation (A4.10), on trouve :

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{\sqrt{i \cdot S}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S}} \cdot t\right) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{i}{S}}$$

Figure A4.1 : Allure de $L(t)$ avec une AI et une perturbation constante



ANNEXE 5 : Equation différentielle d'ordre 2, théorie

Pour résoudre une équation différentielle du 2^{ème} ordre de type :

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + c \cdot y = 0$$

Il faut résoudre l'équation caractéristique associée :

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

Le type de solution obtenue pour r nous informera sur l'expression de y .

Après résolution, on trouve :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

où r est la variable pour l'équation caractéristique.

Suivant la valeur du $\Delta (=b^2-4ac)$, on trouve trois formes de solutions pour r :

- 1°) $\Delta > 0 \rightarrow$ L'équation caractéristique présente 2 solutions réelles
- 2°) $\Delta = 0 \rightarrow$ L'équation caractéristique présente 1 solution réelle double
- 3°) $\Delta < 0 \rightarrow$ L'équation caractéristique présente 2 solutions complexes conjuguées

La forme de solution pour r influencera directement le type d'expression mathématique de la fonction recherchée (celle qui se trouve dans l'équation différentielle, y dans notre cas). Examinons les 3 possibilités :

- 1°) $\Delta > 0 \rightarrow$ L'équation caractéristique présente 2 solutions réelles

La fonction recherchée au sein de l'équation différentielle vérifie alors l'expression :

$$y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} \quad \text{où } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont les deux racines réelles}$$

- 2°) $\Delta = 0 \rightarrow$ L'équation caractéristique présente 1 solution réelle double

La fonction recherchée au sein de l'équation différentielle vérifie alors l'expression :

$$y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) e^{r_{12} x} \quad \text{où } r_{12} \text{ est la racine réelle double}$$

- 3°) $\Delta < 0 \rightarrow$ L'équation caractéristique présente 2 solutions complexes conjuguées

La fonction recherchée au sein de l'équation différentielle vérifie alors l'expression :

$$y(x) = e^{ux} \cdot (C_1 \cdot \sin vx + C_2 \cdot \cos vx)$$

Où les solutions complexes sont $r_1 = u + vj$ et $r_2 = u - vj$

Pour ensuite trouver les valeurs de C_1 et de C_2 , il nous faut deux informations supplémentaires. Souvent on utilise les conditions initiales qui font apparaître les valeurs de $y_0 = y(x=0)$ et de $y'_0 = (dy/dx)_{x=0}$.

Figure A5.1 : Equation différentielle du 2^{ème} ordre à coefficients constants

Les données ci-dessous proviennent de :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Equation_différentielle_linéaire_d'ordre_deux

A coefficients constants [modifier]

Elles sont de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des réels, a non nul.

On les rencontre, entre autres, dans la modélisation de mouvement avec force de rappel (type ressort), avec ou sans amortissement (voir Exemples d'équations différentielles) ou encore dans les circuits électriques comportant une inductance et un condensateur.

On cherche des solutions sous forme exponentielle, c'est-à-dire telles que $f(x) = e^{\lambda x}$. Une telle fonction sera solution de l'équation différentielle si et seulement si λ est solution de

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle.

Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe du discriminant Δ .

SI $\Delta > 0$ [modifier]

L'équation possède deux solutions λ_1 et λ_2 .

L'équation possède au moins deux fonctions exponentielles solutions $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. On démontre que ces deux solutions engendrent l'ensemble des solutions. C'est-à-dire que l'ensemble des solutions sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ où C_1 et C_2 sont deux réels quelconques.

Pour déterminer ces deux constantes, il est naturel de donner deux informations sur la fonction

- cela se fait en général en donnant des **conditions initiales** en un point x_0 , c'est-à-dire en précisant les valeurs y_0 et y'_0 de y et y' à cet instant. Dans ce cas l'existence et l'unicité de la solution vérifiant ces conditions initiales sont garanties.
- pour de nombreux problèmes physiques, il est fréquent de donner des **conditions aux limites** en précisant les valeurs y_1 et y_2 aux instants x_1 et x_2 . Il y a alors fréquemment existence et unicité des solutions, mais ce n'est pas toujours vrai.

SI $\Delta = 0$ [modifier]

L'équation ne possède qu'une seule solution λ . On démontre alors que l'ensemble des solutions sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = (Ax + B)e^{\lambda x}$ où A et B sont des réels quelconques.

Pour déterminer A et B , il faut, comme dans le cas précédent posséder deux informations sur f .

SI $\Delta < 0$ [modifier]

L'équation ne possède pas de solutions réelles mais deux solutions complexes λ_1 et λ_2 conjuguées l'une de l'autre.

Il est alors utile de faire une incursion dans les fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} . Les fonctions f_1 et f_2 définie par $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont des solutions de l'équation dans cet ensemble. On démontre alors que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies par $f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ où C_1 et C_2 sont deux complexes quelconques.

Cependant, on cherche encore des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} . On note alors $\lambda_1 = u + iv$. Les fonctions f_1 et f_2 s'écrivent alors

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{ux} (\cos(vx) + i \sin(vx)) \\ f_2(x) &= e^{ux} (\cos(vx) - i \sin(vx)) \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que les fonctions g_1 et g_2 définies par

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{2} (f_1(x) + f_2(x)) = e^{ux} \cos(vx) \\ g_2(x) &= \frac{1}{2i} (f_1(x) - f_2(x)) = e^{ux} \sin(vx) \end{aligned}$$

sont encore des solutions de l'équation différentielle mais à valeurs dans \mathbb{R} . On démontre alors qu'elles engendrent l'ensemble des solutions à valeurs dans \mathbb{R} . C'est-à-dire que cet ensemble est formé des fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{ux} (A \cos(vx) + B \sin(vx)) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels quelconques.}$$

Remarque : on peut écrire cette solution sous la forme $f(x) = qe^{ux} \cos(vx + r)$ et r sont deux réels quelconques (cette forme est parfois plus pratique).

La détermination de A et B (ou q et r) se fait, comme dans les cas précédents, par la donnée de deux informations sur f .

ANNEXE 6.0 : API sur perturbation constante, résolution, intro

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

$$(A6.1) \quad F_{IN}(t) = F_R(t) = -i \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt - p \cdot (L(t) - L_C)$$

Pour une AP&I, on additionne l'AP et l'AI

$$(A6.2) \quad F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P \quad \text{Perturbation constante}$$

$$(A6.3) \quad L(t=0) = L_0 = L_C \quad \text{Supposition initiale}$$

Insérons les expressions de $F_{IN}(t)$ et de $F_{OUT}(t)$ données en (A6.1) et (A6.2) au sein de l'équation différentielle du système. On obtient alors :

$$(A6.4) \quad \frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times \left(-i \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt - p \cdot (L(t) - L_C) - F_P \right)$$

Comme le fait d'ajouter une constante à une fonction ne change rien à sa dérivée :

$$(A6.5) \quad \frac{d(L(t)-L_C)}{dt} = -\frac{i}{S} \cdot \int_0^t (L(t) - L_C) \cdot dt - \frac{p}{S} \cdot (L(t) - L_C) - \frac{F_P}{S}$$

Nous avons ici une équation intégro-différentielle, nous allons dériver chaque membre par rapport au temps pour avoir une équation différentielle d'ordre 2 :

$$(A6.6) \quad \Rightarrow \frac{d^2(L(t)-L_C)}{dt^2} = -\frac{i}{S} \cdot (L(t) - L_C) - \frac{p}{S} \cdot \frac{d(L(t)-L_C)}{dt}$$

Pour simplifier la résolution de l'équation différentielle, nous allons poser : (A6.7)

$$y(t) = y = L(t) - L_C$$

L'équation différentielle (A6.6) devient alors : (A6.8)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{i}{S} \cdot y - \frac{p}{S} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Nous allons maintenant chercher l'expression de $y(t)$ puis remplacer $y(t)$ par $L(t) - L_C$ de manière à pouvoir isoler $L(t)$ et ainsi obtenir son expression mathématique.

Ordonnons l'équation différentielle (A6.8) suivant un degré décroissant :

$$(A6.9) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{P}{S} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{i}{S} \cdot y = 0$$

Comme expliqué Annexe 5, nous devons résoudre l'équation caractéristique associée de manière à pouvoir exposer l'expression de y . Il y a néanmoins une petite différence parce qu'ici nous dérivons par rapport au temps alors que l'Annexe 5 montre une dérivation par rapport à x . Ceci est dû au fait que l'Annexe 5 utilise la variable x comme abscisse (typique pour une théorie mathématique) alors qu'ici l'abscisse est t .

Nous devons examiner les trois formes de solutions pour l'équation caractéristique de manière à exposer l'ensemble des expressions mathématiques qui vérifient l'équation (A6.9) reprise ici dessus.

Exposons l'équation caractéristique associée (on choisit r comme nom de variable) :

$$r^2 + \frac{P}{S} \cdot r + \frac{i}{S} = 0$$

Les solutions pour r sont alors :

$$r = \frac{-\frac{P}{S} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{S}\right)^2 - \frac{4i}{S}}}{2}$$

Examinons séparément les 3 situations qui diffèrent suivant la valeur du Δ :

$$1^\circ) \quad \Delta > 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{P}{S}\right)^2 - \frac{4i}{S} > 0 \quad (A6.10)$$

L'équation caractéristique présente 2 solutions réelles.

La fonction recherchée au sein de l'équation différentielle vérifie alors l'expression :

$$(A6.11) \quad y(t) = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t} \quad \text{où } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont les racines réelles}$$

$$2^\circ) \quad \Delta = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{P}{S}\right)^2 - \frac{4i}{S} = 0 \quad (A6.12)$$

L'équation caractéristique présente 1 solution réelle double.

La fonction recherchée au sein de l'équation différentielle vérifie alors l'expression :

$$(A6.13) \quad y(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) e^{r_{12} t} \quad \text{où } r_{12} \text{ est la racine réelle double}$$

$$3^\circ) \quad \Delta < 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{P}{S}\right)^2 - \frac{4i}{S} < 0 \quad (A6.14)$$

L'équation caractéristique présente 2 solutions complexes conjuguées.

La fonction recherchée au sein de l'équation différentielle vérifie alors l'expression :

$$(A6.15) \quad y(t) = e^{ut} \cdot (C_1 \cdot \sin vt + C_2 \cdot \cos vt)$$

Où les solutions complexes sont $r_1 = u + vj$ et $r_2 = u - vj$

Nous pouvons remarquer que les fonctions (A6.11), (A6.13) et (A6.15) ont une forme semblable à celles présentées Annexe 5. Cependant, on remarque qu'ici les expressions sont exprimées en fonction du temps t et non de la variable x .

De manière à favoriser une interprétation physique vis-à-vis des conditions (A6.10), (A6.12) et (A6.14), nous allons exposer ces mêmes conditions en isolant p dans un membre, on obtient alors :

1°) Prédominance de l'action proportionnelle

$$(A6.16) \quad p > 2\sqrt{S \cdot i} \quad \text{qui provient de} \quad \left(\frac{p}{S}\right)^2 - \frac{4i}{S} > 0 \quad (A6.10)$$

On dit qu'il s'agit d'une prédominance à action proportionnelle car la valeur du coefficient d'action proportionnel p est suffisamment grande pour que la contribution de l'action proportionnelle prédomine par rapport à la contribution de l'action intégrale*.

En détaillant davantage l'équation (A6.11), on trouve :

$$(A6.17) \quad y(t) = C_1 \cdot e^{\left(-\frac{p}{2S} + \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(-\frac{p}{2S} - \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t}$$

2°) Equilibre entre l'action proportionnelle et l'action intégrale

$$(A6.18) \quad p = 2\sqrt{S \cdot i} \quad \text{qui provient de} \quad \left(\frac{p}{S}\right)^2 - \frac{4i}{S} = 0 \quad (A6.12)$$

En détaillant davantage l'équation (A6.13), on trouve :

$$(A6.19) \quad y(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) e^{-\frac{p}{2S} t}$$

3°) Prédominance de l'action intégrale

$$(A6.20) \quad p < 2\sqrt{S \cdot i} \quad \text{qui provient de} \quad \left(\frac{p}{S}\right)^2 - \frac{4i}{S} < 0 \quad (A6.14)$$

En détaillant davantage l'équation (A6.15), on trouve :

$$(A6.21) \quad y(t) = e^{-\frac{p}{2S} t} \left[C_1 \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t \right) + C_2 \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t \right) \right]$$

* Pour avoir une prédominance de l'action proportionnelle vis-à-vis de l'action intégrale, on aurait pu penser que la condition à respecter est simplement $p > i$ mais ceci est impossible au niveau des unités.

ANNEXE 6.1 : API sur perturbation cte, prédominance AP

L'annexe 6.0 a mis en évidence que lorsque $p > 2\sqrt{S \cdot i}$ nous sommes dans le cas d'une prédominance de l'action proportionnelle avec comme expression de $y(t)$:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\left(-\frac{p}{2S} + \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(-\frac{p}{2S} - \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t} \quad (\text{A6.17})$$

Pour rappel, nous avons posé $y(t) = L(t) - L_C$ pour faciliter la résolution.

Pour obtenir l'expression $L(t)$, nous allons commencer par rechercher l'expression complète de $y(t)$ (en trouvant les valeurs de C_1 et C_2) que nous égalons à $L(t) - L_C$. Pour trouver C_1 et C_2 (des constantes), il nous faut deux équations supplémentaires. Nous allons insérer deux équations qui correspondent aux conditions initiales :

(A6.22) $y(t=0) = 0$ Ce qui revient à dire $L(t=0) = L_C$
 En effet, il faut garder à l'esprit que $y(t)$ représente $L(t) - L_C$. Nous avons posé cela en (A6.7).

(A6.23) $(dy/dt)_{t=0} = -F_P/S$ Ce qui revient à dire $(dL(t)/dt)_{t=0} = -F_P/S$
 En effet, $(dL(t)/dt)$ vaut la même chose que (dy/dt) car $y(t)$ représente $L(t) - L_C$ et L_C est une constante.

La raison pour laquelle $(dL(t)/dt)$ vaut $(-F_P/S)$ à l'instant $t = 0$, peut être expliquée à partir de l'équation différentielle du système en tenant compte que $F_{IN}(t) = 0$ à l'instant $t=0$. Le débit d'entrée $F_{IN}(t)$ (qui constitue l'action de régulation) est bien sûr nul puisqu'il provient d'une contribution de l'action proportionnelle sans écart entre le niveau et la consigne et d'une contribution de l'action intégrale qui intègre sur un intervalle de temps nul.

Essayons d'inclure la condition (A6.22) au sein de l'équation (A6.17) afin d'obtenir des informations supplémentaires sur C_1 et C_2 :

$$y(t=0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = 0 \quad \Rightarrow C_2 = -C_1$$

Nous avons obtenu un lien entre les inconnues C_1 et C_2 . Nous allons maintenant remplacer C_2 de l'équation (A6.17) par $(-C_1)$ de manière à exposer l'équation de $y(t)$ ne comportant plus qu'un paramètre à déterminer :

$$\begin{aligned} (\text{A6.24}) \quad y(t) &= C_1 \cdot e^{\left(-\frac{p}{2S} + \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t} - C_1 \cdot e^{\left(-\frac{p}{2S} - \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t} \\ &\Leftrightarrow y(t) = C_1 \cdot \left(e^{-\frac{p}{2S} \cdot t} \cdot e^{\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t} - e^{-\frac{p}{2S} \cdot t} \cdot e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) \cdot t} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \left(e^{\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right)t} - e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right)t} \right)$$

Pour trouver C_1 (le dernier paramètre inconnu de l'équation de $y(t)$), nous devons prendre en compte notre 2^{ème} condition initiale donnée en A6.23) qui fait apparaître la dérivée par rapport au temps de $y(t)$. Nous allons donc devoir dériver (en fonction du temps) la dernière expression de $y(t)$ donnée ci-dessus. Pour simplifier, nous allons temporairement poser :

$$A = -\frac{p}{2S} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}$$

L'expression simplifiée de $y(t)$ et le calcul de sa dérivée sont alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cdot e^{At} (e^{Bt} - e^{-Bt}) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= C_1 \cdot \left[(Ae^{At} (e^{Bt} - e^{-Bt})) + (e^{At} \cdot (Be^{Bt} + Be^{-Bt})) \right] \end{aligned}$$

En faisant apparaître l'équation (A6.23) au sein de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} &= C_1 \cdot \left[(Ae^0 (e^0 - e^0)) + (e^0 \cdot (Be^0 + Be^0)) \right] \\ \Rightarrow -\frac{F_P}{S} &= C_1 \cdot 2B \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{F_P}{2S} \cdot \frac{1}{B} \end{aligned}$$

En remplaçant B par sa valeur, on trouve finalement la valeur de C_1 :

$$C_1 = -\frac{F_P}{2S} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}} \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{F_P}{\sqrt{p^2 - 4iS}}$$

L'expression de $y(t)$ devient alors :

$$y(t) = -\frac{F_P}{\sqrt{p^2 - 4iS}} \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \left(e^{\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right)t} - e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right)t} \right)$$

Il existe une fonction appelée sinus hyperbolique qui va permettre de simplifier l'expression de $y(t)$. On se base sur le fait que :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

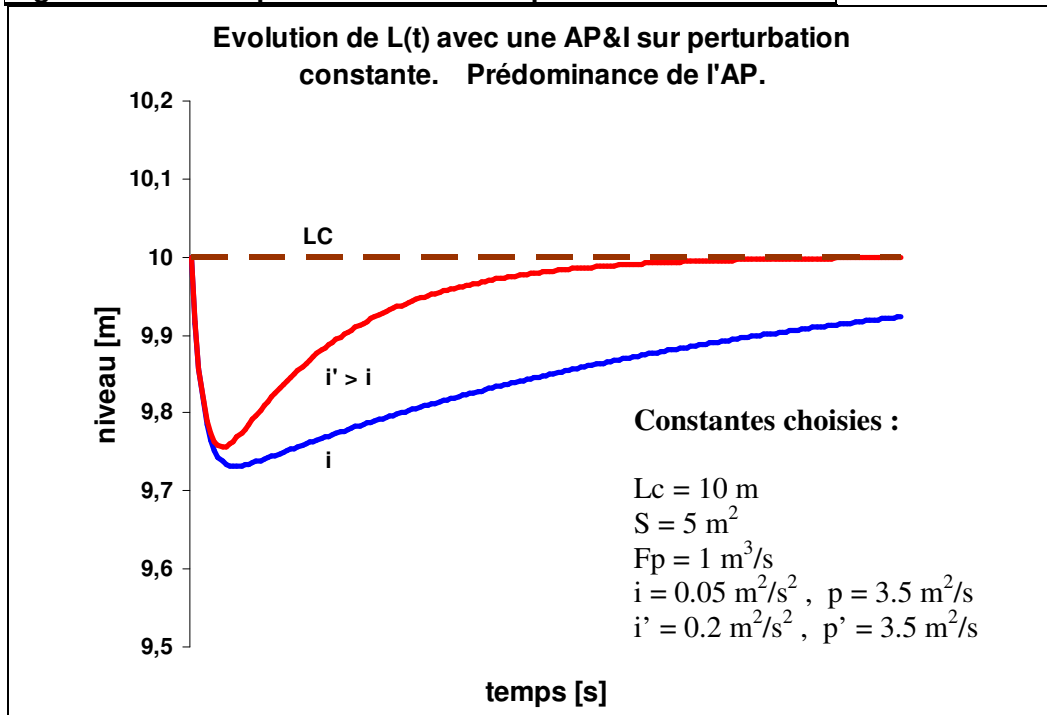
L'expression de $y(t)$ devient alors :

$$(A6.25) \quad y(t) = -\frac{2F_P}{\sqrt{p^2 - 4iS}} \cdot e^{-\frac{p}{2S} \cdot t} \cdot sh\left(\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) t\right)$$

Comme $y(t) = L(t) - L_C$, on peut obtenir $L(t)$:

$$(A6.26) \quad L(t) = L_C - \frac{2F_P}{\sqrt{p^2 - 4iS}} \cdot e^{-\frac{p}{2S} \cdot t} \cdot sh\left(\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2S}\right)^2 - \frac{i}{S}}\right) t\right)$$

Figure A6.1 : AP&I prédominance AP et perturbation constante



ANNEXE 6.2 : API sur perturbation cte, équilibre AP et AI

L'annexe 6.0 a mis en évidence que lorsque $p = 2\sqrt{S \cdot i}$ il y a équilibre entre l'action intégrale et l'action proportionnelle. Avec comme expression de $y(t)$:

$$y(t) = (C_1 + C_2 \cdot t)e^{-\frac{p}{2S}t} \quad (\text{A6.19})$$

Pour rappel, nous avons posé $y(t) = L(t) - L_C$ pour faciliter la résolution.

Pour obtenir l'expression $L(t)$, nous allons commencer par rechercher l'expression complète de $y(t)$ (en trouvant les valeurs de C_1 et C_2) que nous égalons à $L(t) - L_C$. Pour trouver C_1 et C_2 (des constantes), il nous faut deux équations supplémentaires. Nous allons insérer deux équations qui correspondent aux conditions initiales :

(A6.27) $y(t=0) = 0$ Ce qui revient à dire $L(t=0) = L_C$
 En effet, il faut garder à l'esprit que $y(t)$ représente $L(t) - L_C$. Nous avons posé cela en (A6.7).

(A6.28) $(dy/dt)_{t=0} = -F_P/S$ Ce qui revient à dire $(dL(t)/dt)_{t=0} = -F_P/S$
 En effet, $(dL(t)/dt)$ vaut la même chose que (dy/dt) car $y(t)$ représente $L(t) - L_C$ et L_C est une constante.

La raison pour laquelle $(dL(t)/dt)$ vaut $(-F_P/S)$ à l'instant $t = 0$, peut être expliquée à partir de l'équation différentielle du système en tenant compte que $F_{IN}(t) = 0$ à l'instant $t=0$. Le débit d'entrée $F_{IN}(t)$ (qui constitue l'action de régulation) est bien sûr nul puisqu'il provient d'une contribution de l'action proportionnelle sans écart entre le niveau et la consigne et d'une contribution de l'action intégrale qui intègre sur un intervalle de temps nul.

Essayons d'inclure la condition (A6.27) au sein de l'équation (A6.19) afin d'obtenir des informations supplémentaires sur C_1 et C_2 :

$$y(t=0) = 0 \quad \Rightarrow (C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-\frac{p}{2S} \cdot 0} = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$$

Nous avons trouvé $C_1=0$, il nous reste à trouver C_2 .

Commençons par simplifier l'expression (A6.19) de $y(t)$ en remplaçant C_1 par 0. On trouve alors une expression de $y(t)$ au sein de laquelle il n'y a plus qu'un seul paramètre inconnu :

$$(A6.29) \quad y(t) = C_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{p}{2S}t}$$

Pour trouver C_2 (le dernier paramètre inconnu de l'équation de $y(t)$), nous devons prendre en compte notre 2^{ème} condition initiale donnée en (A6.28) qui fait apparaître la dérivée par rapport au temps de $y(t)$. Nous allons donc devoir dériver (en fonction du temps) la dernière expression de $y(t)$ donnée ci-dessus :

$$\frac{dy}{dt} = C_2 \cdot \left[1 \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} + t \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \cdot \left(-\frac{p}{2S} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = C_2 \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \cdot \left[1 + \left(-\frac{p}{2S} \right) \cdot t \right]$$

En faisant apparaître l'équation (A6.28) au sein de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = C_2 \cdot e^0 \cdot \left[1 + \left(-\frac{p}{2S} \right) \cdot 0 \right]$$

$$\Rightarrow -\frac{F_P}{S} = C_2 \quad \Rightarrow C_2 = -\frac{F_P}{S}$$

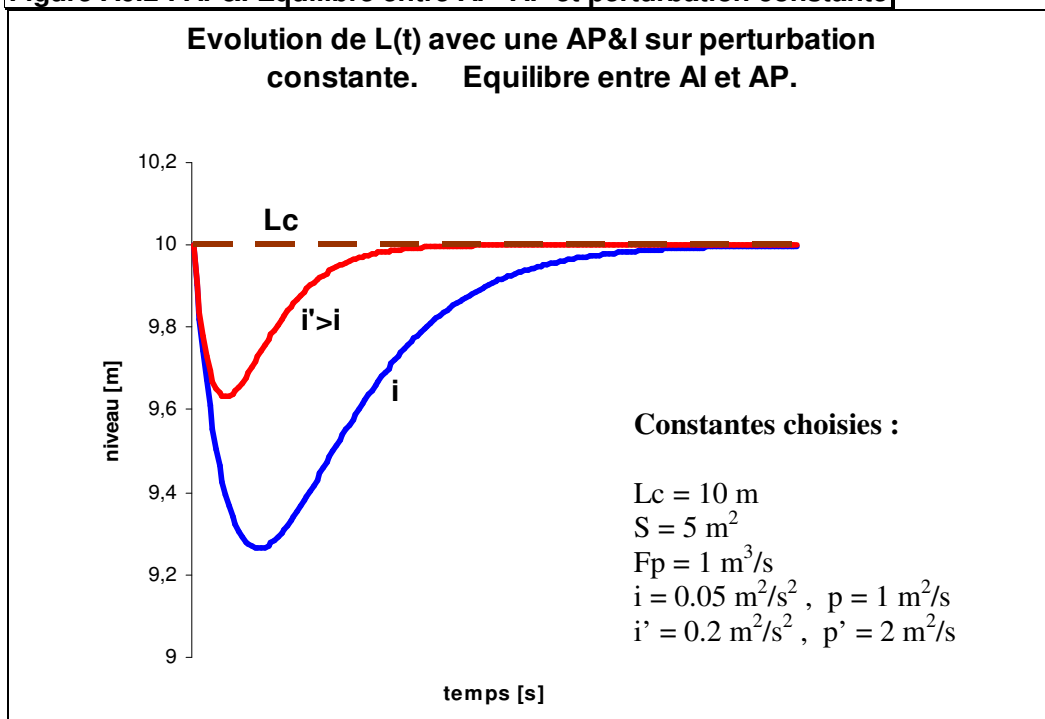
En remplaçant C_2 par la valeur obtenue au sein de l'équation (A6.29), on trouve :

$$(A6.30) \quad y(t) = -\frac{F_P}{S} \cdot t \cdot e^{-\frac{p}{2S}t}$$

Comme $y(t) = L(t) - L_C$, on peut obtenir $L(t)$:

$$(A6.31) \quad L(t) = L_C - \frac{F_P}{S} \cdot t \cdot e^{-\frac{p}{2S}t}$$

Figure A6.2 : AP&I Equilibre entre AI - AP et perturbation constante



ANNEXE 6.3 : API sur perturbation cte, prédominance AI

L'annexe 6.0 a mis en évidence que lorsque $p < 2\sqrt{S \cdot i}$ nous sommes dans le cas d'une prédominance de l'action intégrale avec comme expression de $y(t)$:

$$y(t) = e^{-\frac{p}{2S}t} \left[C_1 \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t \right) + C_2 \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t \right) \right] \quad (\text{A6.21})$$

Pour rappel, nous avons posé $y(t) = L(t) - L_C$ pour faciliter la résolution.

Pour obtenir l'expression $L(t)$, nous allons commencer par rechercher l'expression complète de $y(t)$ (en trouvant les valeurs de C_1 et C_2) que nous égalons à $L(t) - L_C$. Pour trouver C_1 et C_2 (des constantes), il nous faut deux équations supplémentaires. Nous allons insérer deux équations qui correspondent aux conditions initiales :

(A6.32) $y(t=0) = 0$ Ce qui revient à dire $L(t=0) = L_C$
 En effet, il faut garder à l'esprit que $y(t)$ représente $L(t) - L_C$. Nous avons posé cela en (A6.7).

(A6.33) $(dy/dt)_{t=0} = -F_P/S$ Ce qui revient à dire $(dL(t)/dt)_{t=0} = -F_P/S$
 En effet, $(dL(t)/dt)$ vaut la même chose que (dy/dt) car $y(t)$ représente $L(t) - L_C$ et L_C est une constante.

La raison pour laquelle $(dL(t)/dt)$ vaut $(-F_P/S)$ à l'instant $t = 0$, peut être expliquée à partir de l'équation différentielle du système en tenant compte que $F_{IN}(t) = 0$ à l'instant $t=0$. Le débit d'entrée $F_{IN}(t)$ (qui constitue l'action de régulation) est bien sûr nul puisqu'il provient d'une contribution de l'action proportionnelle sans écart entre le niveau et la consigne et d'une contribution de l'action intégrale qui intègre sur un intervalle de temps nul.

Essayons d'inclure la condition (A6.32) au sein de l'équation (A6.21) afin d'obtenir des informations supplémentaires sur C_1 et C_2 :

$$y(t=0) = 0 \quad \Rightarrow e^0 [C_1 \cdot \sin(0) + C_2 \cdot \cos(0)] = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(A6.34) \quad \Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \sin \left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t \right)$$

Pour trouver C_1 (le dernier paramètre inconnu de l'équation de $y(t)$), nous devons prendre en compte notre 2^{ème} condition initiale donnée en (A6.33) qui fait apparaître la dérivée par rapport au temps de $y(t)$. Nous allons donc devoir dériver (en fonction du temps) la dernière expression de $y(t)$ donnée ci-dessus. Pour simplifier, nous allons temporairement poser :

$$A = -\frac{p}{2S} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2}$$

L'expression simplifiée de $y(t)$ et le calcul de sa dérivée est alors :

$$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{At} \cdot \sin(Bt)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = C_1 \cdot (Ae^{At} \cdot \sin(Bt) + e^{At} \cdot B \cdot \cos(Bt))$$

En faisant apparaître l'équation (A6.33) au sein de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = C_1 \cdot (Ae^0 \cdot \sin(0) + e^0 \cdot B \cdot \cos(0))$$

$$\Rightarrow -\frac{F_P}{S} = C_1 \cdot B \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{F_P}{S \cdot B} = -\frac{F_P}{\sqrt{S \cdot i - \left(\frac{p}{2}\right)^2}} = -\frac{2F_P}{\sqrt{4 \cdot S \cdot i - p^2}}$$

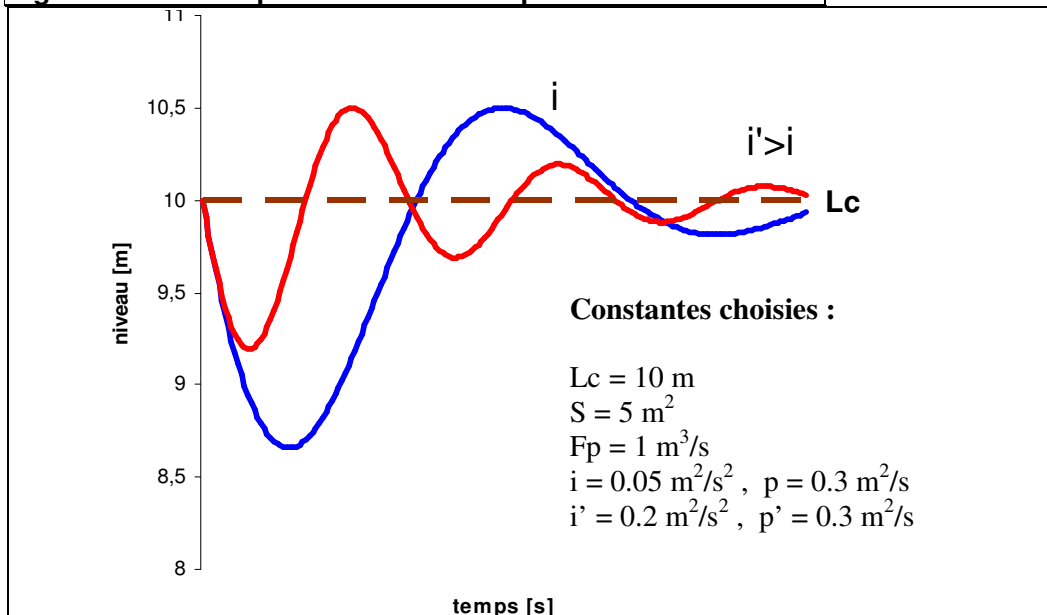
En remplaçant C_1 par la valeur obtenue au sein de l'équation (A6.34), on trouve :

$$(A6.35) \quad y(t) = -\frac{2F_P}{\sqrt{4 \cdot S \cdot i - p^2}} \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t\right)$$

Comme $y(t) = L(t) - L_C$, on peut obtenir $L(t)$:

$$(A6.36) \quad L(t) = L_C - \frac{2F_P}{\sqrt{4 \cdot S \cdot i - p^2}} \cdot e^{-\frac{p}{2S}t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{i}{S} - \left(\frac{p}{2S}\right)^2} t\right)$$

Figure A6.3 : AP&I prédominance AI et perturbation constante



ANNEXE 7: AD sur perturbation constante, résolution

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

(A7.1) $F_{IN}(t) = F_R(t) = -d \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt}$ Action dérivée

(A7.2) $F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P$ Perturbation constante

(A7.3) $L(t=0) = L_0 = L_C$ Supposition initiale

Insérons les expressions de $F_{IN}(t)$ et de $F_{OUT}(t)$ données en (A7.1) et (A7.2) au sein de l'équation différentielle du système. On obtient alors :

(A7.4) $\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times \left(-d \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} - F_P \right)$

Comme soustraire une constante à une fonction ne change rien à sa dérivée :

$$\Rightarrow \frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times \left(-d \cdot \frac{dL(t)}{dt} - F_P \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL(t)}{dt} = -\frac{d}{S} \cdot \frac{dL(t)}{dt} - \frac{F_P}{S}$$

Mettons $\frac{dL(t)}{dt}$ en évidence :

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{d}{S} \right) \frac{dL(t)}{dt} = -\frac{F_P}{S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL(t)}{dt} = -\frac{F_P}{S+d}$$

Nous allons faire passer* « dt » dans le membre de droite puis intégrer les deux membres. On trouve alors :

$$\int_0^t dL(t) = -\frac{F_P}{S+d} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow [L(t)]_0^t = -\frac{F_P}{S+d} \cdot [t]_0^t$$

* Dans le jargon mathématique et scientifique, on entend souvent « faire passer de l'autre côté » pour faire référence au passage d'un terme dans l'autre membre de l'équation. Bien sûr, dans notre cas, faire passer « dt » dans le membre de droite provient indirectement d'une multiplication des deux membres de l'équation par « dt » (ce qui ne modifie en rien l'égalité).

$$\Rightarrow L(t) - L(0) = -\frac{F_P}{S + d} \cdot (t - 0)$$

Comme $L(t=0)=L_C$,
on obtient l'équation de $L(t)$:

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{S + d} \cdot t$$

Nous pouvons constater que nous avons bien l'équation d'une droite de la forme $y = ax+b$ où la variable $y=L(t)$ et la variable x et le temps.

La pente de la droite est :

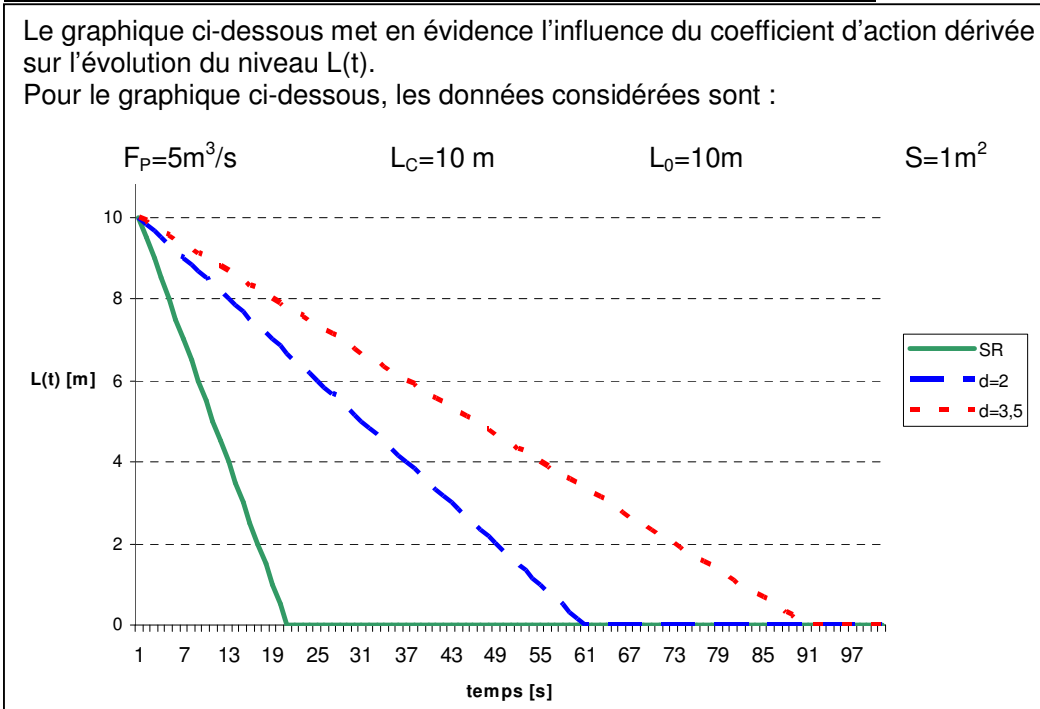
$$-\frac{F_P}{S + d}$$

Remarque : Dans le cas sans régulation (SR), nous avons trouvé :

$$L(t) = L_C - \frac{F_P}{S} \cdot t$$

Il s'agit toujours d'une droite mais dont la pente est plus grande en valeur absolue qu'avec une action dérivée.

Figure A7.1 : Graphique de $L(t)$ pour AD et perturbation constante



Nous constatons que le comportement n'a pas changé par rapport au cas SR, nous avons dans les deux cas le niveau qui chute à vitesse constante. Néanmoins avec l'AD le niveau chute moins vite.

ANNEXE 8: AP&D sur perturbation constante, résolution

L'équation différentielle du système doit être vérifiée et donc de manière générale :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times (F_{IN}(t) - F_{OUT}(t))$$

Avec $F_{IN}(t) = F_R(t)$ et $F_{OUT}(t) = F_P(t)$

Le cas particulier de régulation et de perturbation fait que :

$$(A8.1) \quad F_{IN}(t) = F_R(t) = -d \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} - p(L(t) - L_C) \quad \text{APD}$$

$$(A8.2) \quad F_{OUT}(t) = F_P(t) = F_P \quad \text{Perturbation constante}$$

$$(A8.3) \quad L(t=0) = L_0 = L_C \quad \text{Supposition initiale}$$

En insérant les informations données en (A8.1) et (A8.2) au sein de l'équation différentielle du système, nous obtenons :

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} \times \left(-d \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} - p(L(t) - L_C) - F_P \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} = -\frac{d}{S} \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} - \frac{p}{S} (L(t) - L_C) - \frac{F_P}{S}$$

Cet artifice est justifié car L_C est une constante.

L'idée est d'obtenir une équation différentielle qui met en évidence une seule et même fonction (ici la fonction est $L(t) - L_C$).

Nous allons maintenant tenter de nous débarrasser du terme constant :

$$\Leftrightarrow \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} = -\frac{d}{S} \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} - \frac{p}{S} \left(L(t) - L_C - \frac{F_P}{S} \times \left(-\frac{S}{p} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} = -\frac{d}{S} \cdot \frac{d(L(t) - L_C)}{dt} - \frac{p}{S} \left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)}{dt} = -\frac{d}{S} \cdot \frac{d\left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)}{dt} - \frac{p}{S} \left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p} \right)$$

Cet artifice est justifié car (F_P/p) est une constante.

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{d}{S}\right) \frac{d\left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)}{dt} = -\frac{p}{S} \left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{S+d}{S}\right) \frac{d\left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)}{\left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)} = -\frac{p}{S} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)}{\left(L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}\right)} = -\frac{p}{S+d} dt$$

L'avantage d'avoir pu mettre l'équation différentielle sous cette forme est que nous pouvons maintenant intégrer les deux membres (entre 0 et t).

En effet, si nous posons : $y(t) = L(t) - L_C + \frac{F_P}{p}$ et $A = -\frac{p}{S+d}$

On trouve : $\frac{1}{y} dy = A dt$ $\Rightarrow \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{y} dy = A \int_0^t dt$

L'équation différentielle à résoudre est similaire à l'équation (A3.6 Annexe 3). L'expression de y(t) est d'ailleurs la même, la seule chose qui diffère est la valeur de la constante « A ». Nous obtiendrons alors une expression de L(t) qui ressemble à celle obtenue (A3.11).

Cependant, nous aurons $-\frac{p}{S+d}$ au lieu de $-\frac{p}{S}$ au sein de l'exponentielle :

$$\Rightarrow L(t) = L_C - \frac{F_P}{p} \cdot (1 - e^{-\frac{p}{S+d} \cdot t})$$

Figure A8.1 : Graphique de L(t) pour AP&D et perturbation constante

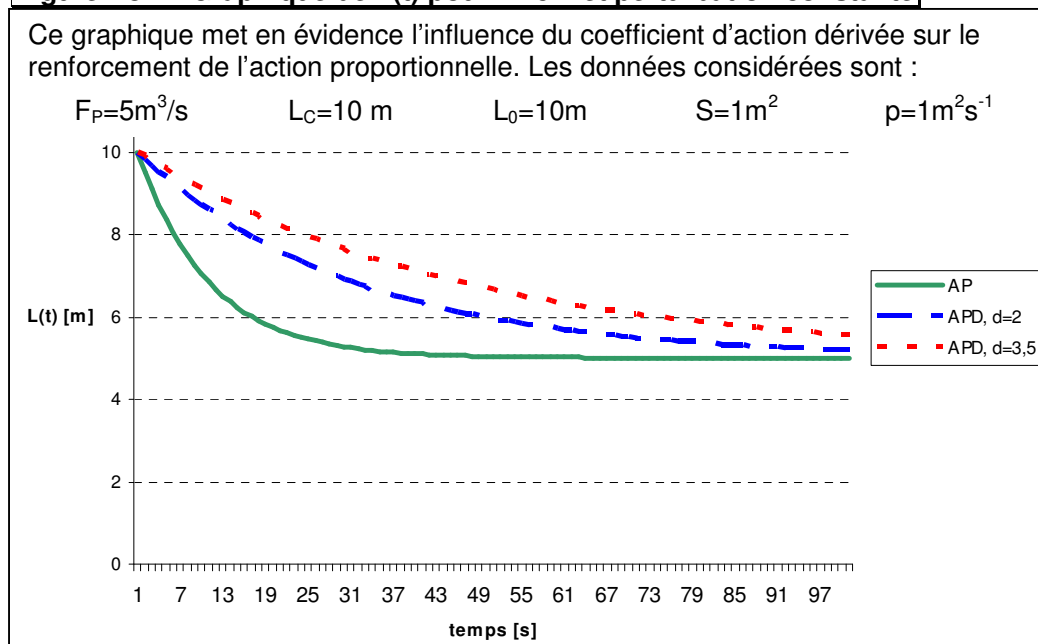


Table des figures

Figure 1 : Représentation très générale d'un processus	1
Figure 2 : Exemple de représentation d'un processus.....	1
Figure 3 : Exemple de représentation d'un système élémentaire.....	2
Figure 4 : Exemple de représentation d'un système mécanisé	2
Figure 5 : Exemple de représentation d'un système automatisé.....	3
Figure 6 : Exemple de régulation de température en tout ou rien.....	5
Figure 7 : Graphique de la température régulée.....	6
Figure 8 : Notion de variable d'entrée et de sortie en régulation.....	7
Figure 9 : Représentation du principe général de régulation.....	8
Figure 10 : Structure générale d'une régulation en BO.....	8
Figure 11 : Structure générale d'une régulation en BF.....	9
Figure 12 : Représentation concrète du problème didactique.....	10
Figure 13 : Représentation du problème didactique en terme de régulation	12
Figure 14 : Régulation en BO du problème didactique.....	12
Figure 15 : Régulation en BF du problème didactique	12
Figure 16 : Débit d'entrée $F_{in}(t)$ en mode tout ou rien	13
Figure 17 : Débit d'entrée $F_{in}(t)$ en mode tout ou peu.....	14
Figure 18 : Evolution de $L(t)$ en régulation tout ou rien	14
Figure 19 : Evolution de $L(t)$ en régulation tout ou peu.....	15
Figure 20 : Schéma bloc de la régulation PID du niveau d'une cuve cylindrique.....	16
Figure 21 : Graphique de $L(t)$ pour AP et perturbation momentanée	19
Figure 22 : Graphique de $L(t)$ pour AP et perturbation constante	21
Figure 23 : Allure de $L(t)$ avec une AI et une perturbation constante	24
Figure 24 : Courbe numérotée pour comprendre l'action intégrale.....	25
Figure 25 : AP&I prédominance AP et perturbation constante	28
Figure 26 : AP&I Equilibre entre AI - AP et perturbation constante.....	30
Figure 27 : AP&I prédominance AI et perturbation constante.....	31
Figure 28 : Graphique de $L(t)$ pour AD et perturbation constante.....	34
Figure 29 : Graphique de $L(t)$ pour AP&D et perturbation constante	35
Figure A2.1 : Graphique de $L(t)$ et sa dérivée pour AP avec $F_p=0$ pour $t \neq 0$	42
Figure A2.2 : Graphique de $F_R(t)$ pour AP avec $F_p=0$ pour $t \neq 0$	43
Figure A3.1 : Graphique de $L(t)$ pour AP et perturbation constante	46
Figure A4.1 : Allure de $L(t)$ avec une AI et une perturbation constante.....	48
Figure A5.1 : Equation différentielle du 2 ^{ème} ordre à coefficients constants.....	50
Figure A6.1 : AP&I prédominance AP et perturbation constante	56
Figure A6.2 : AP&I Equilibre entre AI - AP et perturbation constante.....	58
Figure A6.3 : AP&I prédominance AI et perturbation constante	60
Figure A7.1 : Graphique de $L(t)$ pour AD et perturbation constante.....	62
Figure A8.1 : Graphique de $L(t)$ pour AP&D et perturbation constante.....	64

Table des matières

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	1
1.1 QU'EST-CE QU'UN PROCESSUS ?	1
<i>Définition :</i>	1
<i>Représentation d'un processus :</i>	1
1.2 LES DIFFERENTS TYPES DE SYSTEMES	2
1°) <i>Le système élémentaire</i>	2
2°) <i>Le système mécanisé</i>	2
3°) <i>Le système automatisé</i>	3
1.3 LES SYSTEMES BOUCLES	4
<i>Domaines concernés</i>	4
<i>Quelques notions liées au contrôle de processus</i>	4
<i>Exemple de système asservi utilisé pour la régulation</i>	5
CHAPITRE 2 : LA REGULATION	7
2.1 VARIABLES D'ENTREE ET DE SORTIE	7
2.2 PRINCIPE GENERAL	7
2.3 REGULATION EN BO ET EN BF.....	8
2.4 PROBLEME DIDACTIQUE.....	10
2.5 REGULATION PAR « TOUT OU RIEN » ET PAR « TOUT OU PEU ».....	13
1 <i>Principe</i>	13
2 <i>Evolution de L(t) sur perturbation constante</i>	14
3 <i>Conclusions sur ces types de régulation</i>	15
2.6 REGULATION PAR PID	16
1 <i>Etude de l'action proportionnelle (AP)</i>	17
2 <i>Etude de l'action intégrale (AI)</i>	23
3 <i>Etude de l'AP&I – Cas d'une perturbation constante</i>	26
4 <i>Etude de l'AD (action dérivée) – Perturbation constante</i>	33
5 <i>Etude de l'AP&D – Cas d'une perturbation constante</i>	34
6 <i>L'action PID</i>	36
7 <i>L'ordre d'un régulateur</i>	36
8 <i>Les types de régulateurs rencontrés</i>	37
9 <i>Expression des actions P, I, D</i>	37
ANNEXE 1 : AP SUR PERTURBATION MOMENTANEE, RESOLUTION.	39
ANNEXE 2 : AP SUR PERTURBATION MOMENTANEE, JUSTIFICATION.....	42
ANNEXE 3 : AP SUR PERTURBATION CONSTANTE, RESOLUTION.	44
ANNEXE 4 : AI SUR PERTURBATION CONSTANTE, RESOLUTION.	47
ANNEXE 5 : EQUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE 2, THEORIE	49
ANNEXE 6.0 : API SUR PERTURBATION CONSTANTE, RESOLUTION, INTRO	51
ANNEXE 6.1 : API SUR PERTURBATION CTE, PREDOMINANCE AP	54
ANNEXE 6.2 : API SUR PERTURBATION CTE, EQUILIBRE AP ET AI	57
ANNEXE 6.3 : API SUR PERTURBATION CTE, PREDOMINANCE AI	59
ANNEXE 7: AD SUR PERTURBATION CONSTANTE, RESOLUTION	61
ANNEXE 8: AP&D SUR PERTURBATION CONSTANTE, RESOLUTION	63
TABLE DES FIGURES	65
TABLE DES MATIERES.....	66